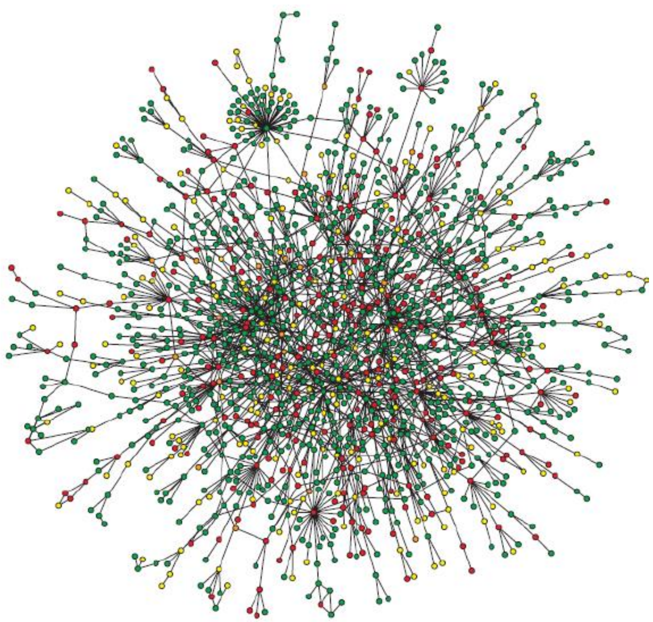
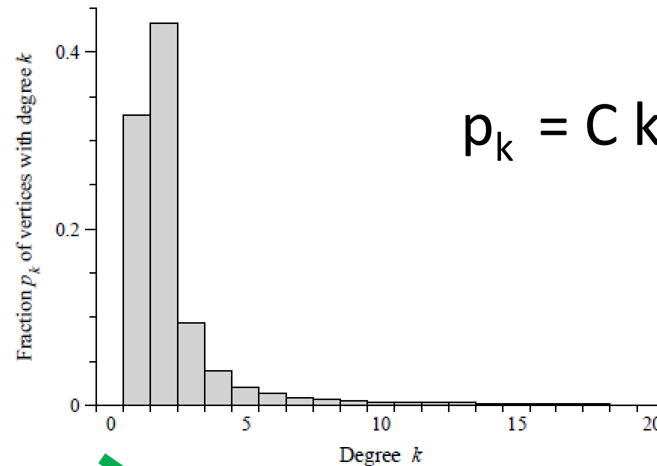
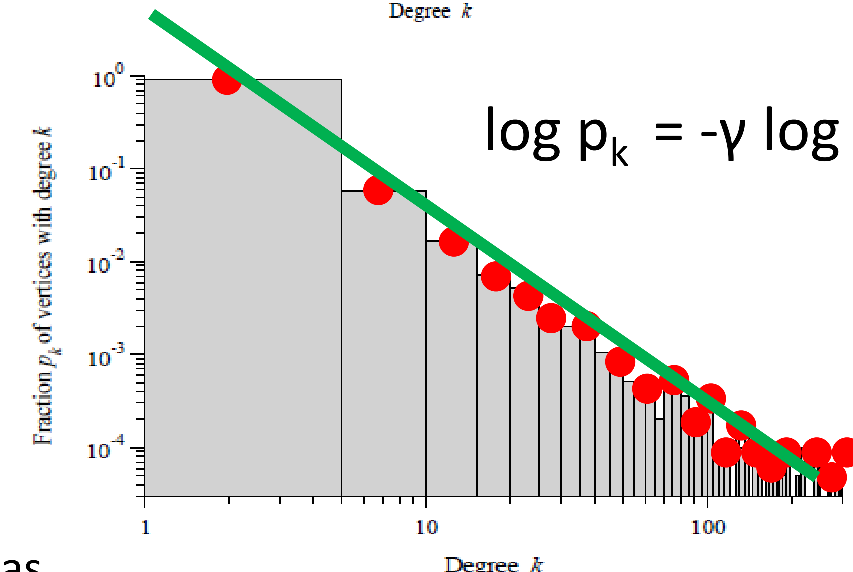
# Propiedades de escala

# Distribucion de grado






$p_k = C\, k^{-\gamma}$




$\log p_k = -\gamma \log k + c$

$\log p_k = -\gamma \log k + c$

$e^{\log pk} = e^{-\gamma \log k + c}$

$p_k = k^{-\gamma}\, e^c$

$p_k = C\, k^{\cancel{-\gamma}}$ Ley de potencias

3A.
s, a predom-
rons (see ar-
iation of the
rapid drop
hat has been
LO barriers,
t is obtained
y by d-char-
igin of this
tively small
ned. This is
dependence
ng effects on
e calculation
he Co-ALO
e also shown
rop can be
waves.
and in sev-
nonstrate the
ucture of the
ng the spin
ns. The neg-
nterface has
cts between
is similar to

# Emergence of Scaling in Random Networks

**Albert-László Barabási* and Réka Albert**

Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary scale-free distributions, which indicates that the development of large networks is governed by robust self-organizing phenomena that go beyond the particulars of the individual systems.

The inability of contemporary science to describe systems composed of nonidentical elements that have diverse and nonlocal interactions currently limits advances in many disciplines, ranging from molecular biology to computer science (*1*). The difficulty of describing these systems lies partly in their topology: Many of them form rather complex networks whose vertices are the elements of the system and whose edges represent the interactions between them. For example, liv-

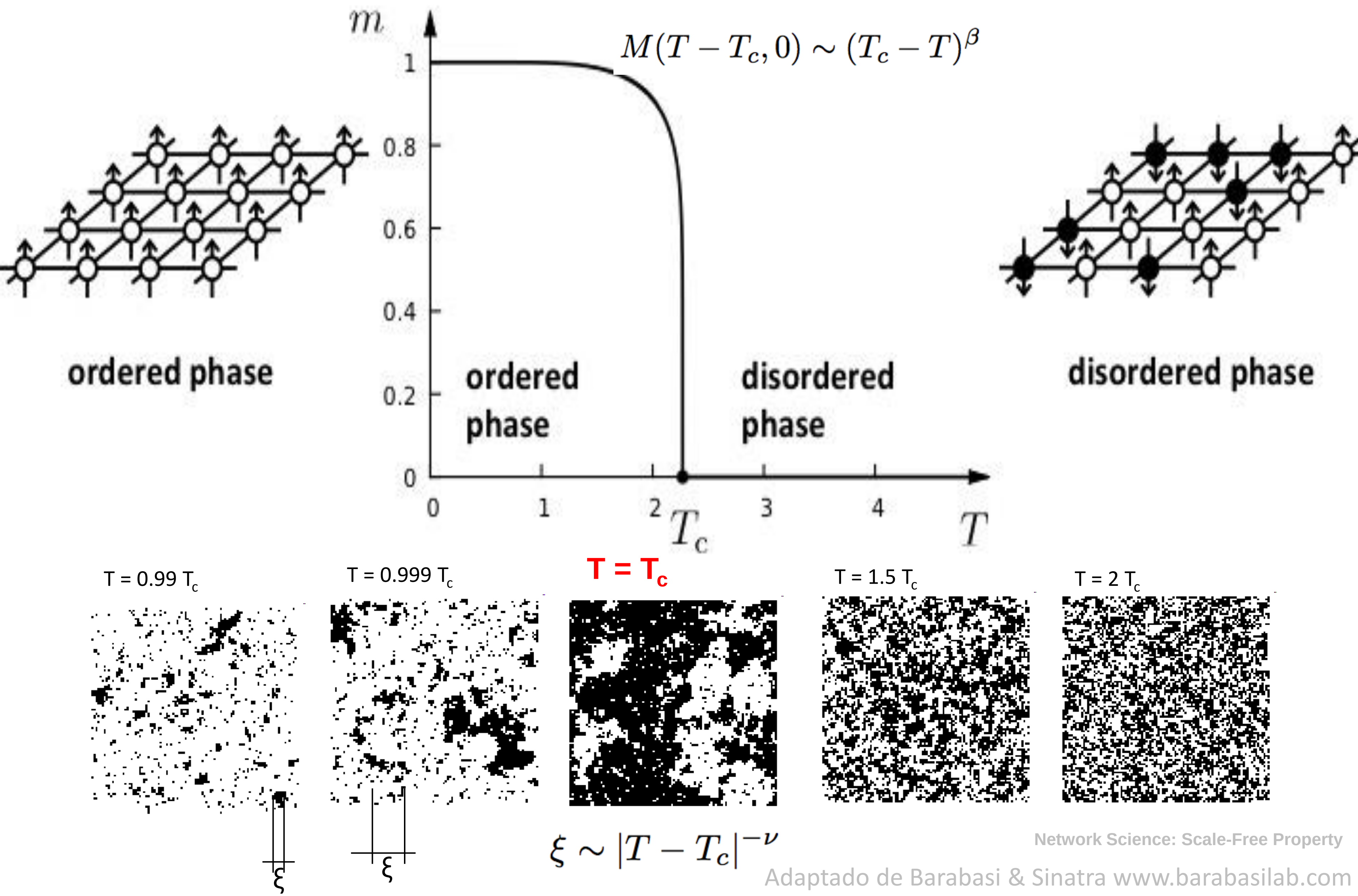
Department of Physics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: alb@nd.edu



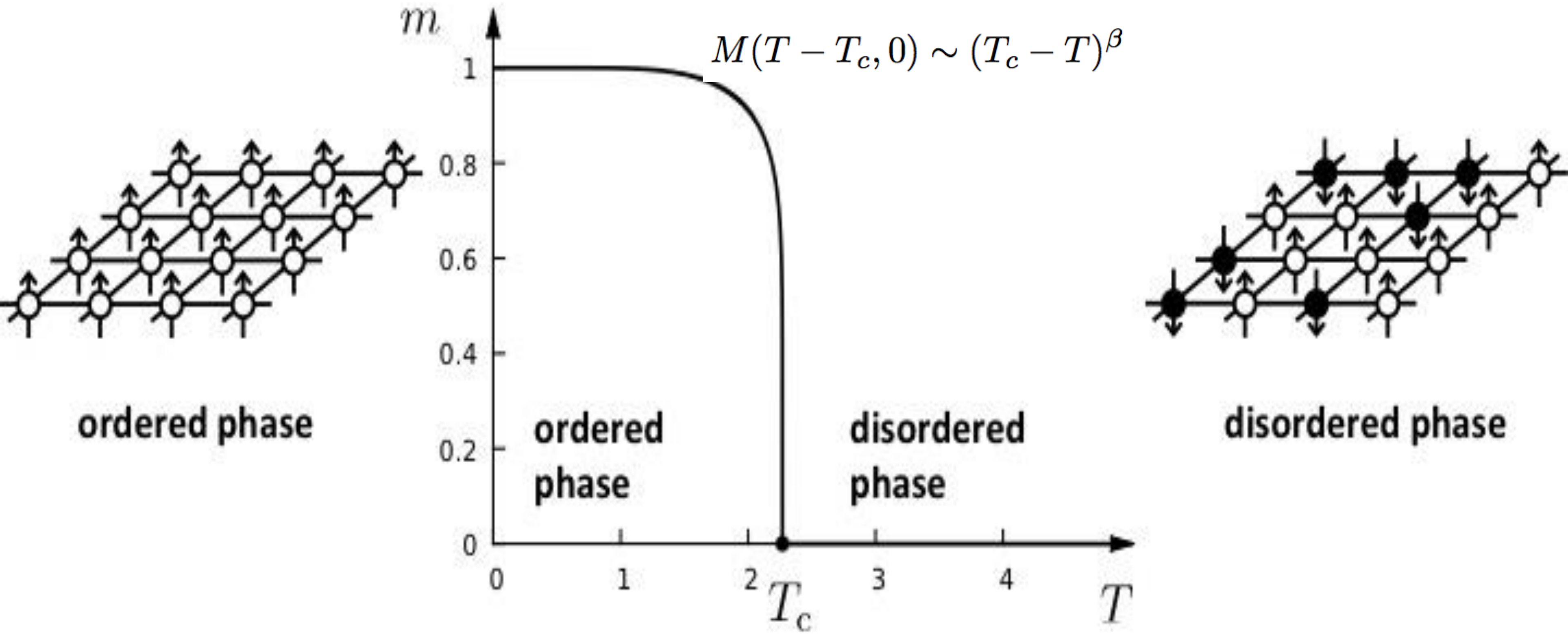
26000 citas

# Fenómenos críticos: materiales magnéticos

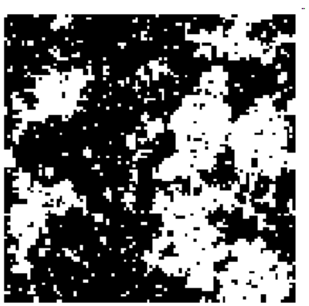



Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

# Fenómenos críticos: materiales magnéticos




**T = $T_c$**



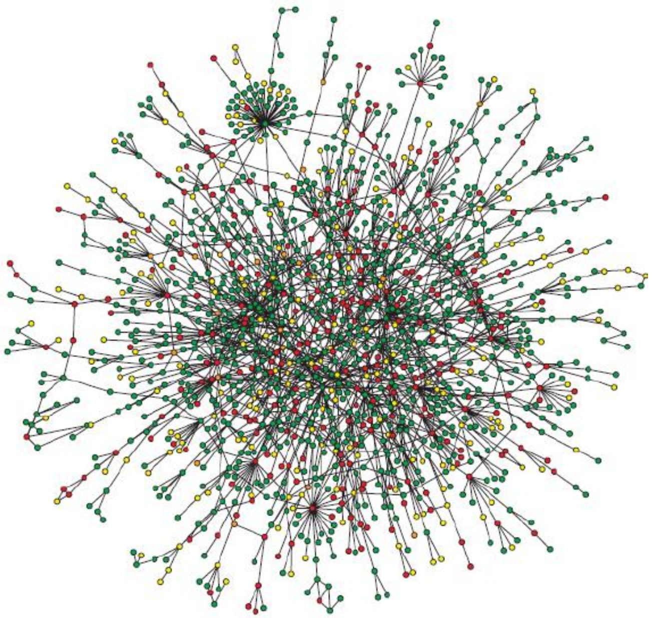
$$\xi \sim |T-T_c|^{-\nu}$$

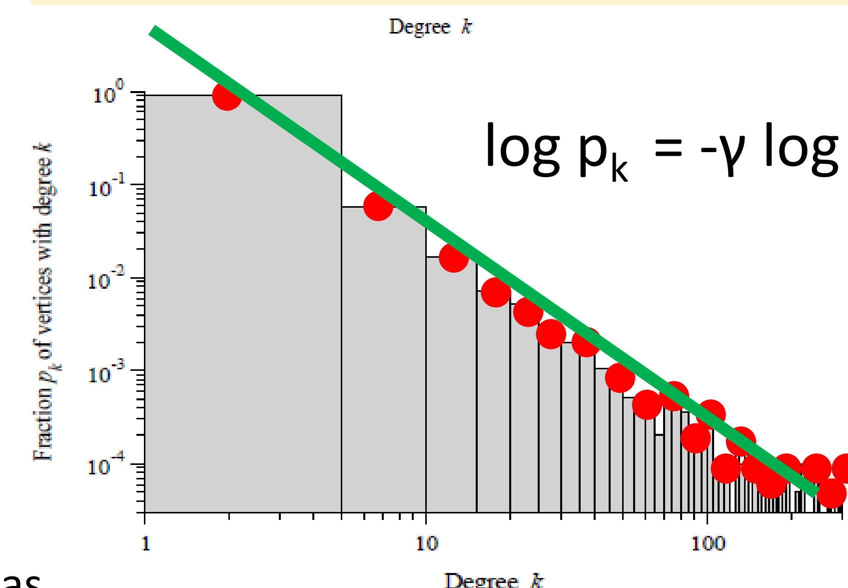
- Long de correlación diverge: todo el sistema está correlacionado (!)
- **Invariancia de escala**: distribuciones power-law. No existe una escala característica para fluctuaciones
- **Universalidad**: exponentes que aparecen son independientes de los detalles de las interacciones

# Emergence of Scaling in Random Networks

Albert-László Barabási* and Réka Albert

Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two ingredients reproduces the observed stationary scale-free distributions, which indicates that the development of large networks is governed by robust self-organizing phenomena that go beyond the particulars of the individual systems.

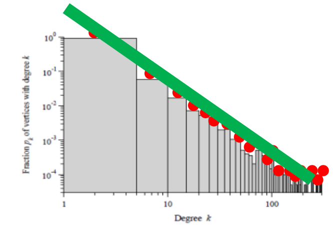





$\log p_k = -\gamma \log k + c$

$p_k = C\, k^{-\gamma}$ Ley de potencias

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



# Formalismo

**Discreto**

Probabilidad de que un nodo tenga grado *k*

$$p_k = Ck^{-\gamma}.$$

Condicion de normalización:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} = 1 \qquad C = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}} = \frac{1}{\zeta(\gamma)},$$

$$p_k = \frac{k^{-\gamma}}{\zeta(\gamma)}$$

Función zeta de Riemann ($\gamma$>1)

**Continuo**

Para avanzar analìticamente asumimos que el grado de un nodo puede ser un número real

$$p(k) = Ck^{-\gamma}.$$

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} p(k)dk = 1$$

$$C = \frac{1}{\int_{k_{\min}}^{\infty} k^{-\gamma}dk} = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1}$$

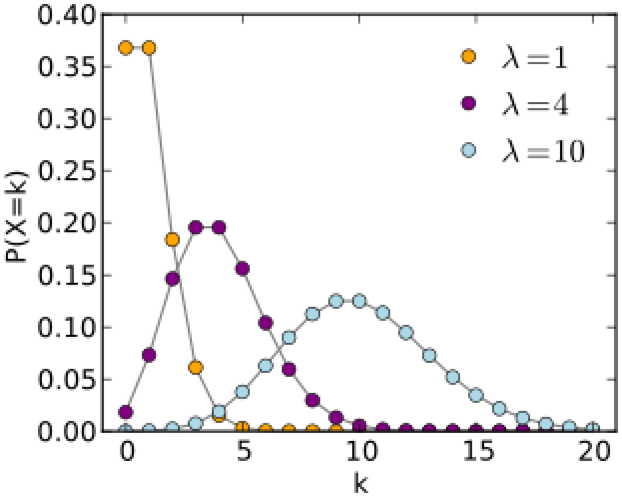
Grado a partir del cual se observa ley de potencia

$$p(k) = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1}k^{-\gamma}.$$

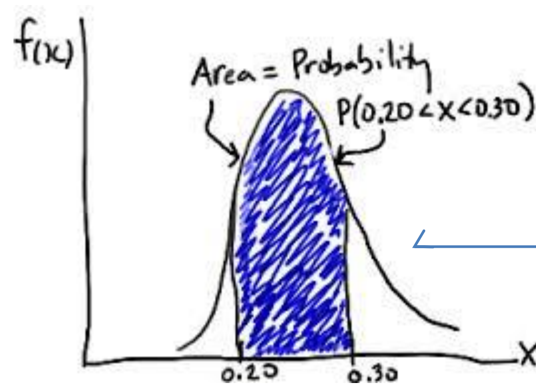
Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

# Formalismo (repaso)

$$p_{k\,\in[k_1,k_2]} = \int_{k_1}^{k_2} p(k)dk$$




$p_k$




$$p_{k\,\geq\,k_2} = \sum_{k_2}^{\infty} p(k) \qquad p_{k\geq k_2} = \int_{k_2}^{\infty} p(k)dk$$

prob de encontrar un nodo con $k \geq k_2$

$$\langle f_k\rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} f_k\, p(k) \qquad \langle f(k)\rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} f(k)\, p(k)dk$$

valor medio de una funcion *f(k)*

$$\langle k\rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k\, p(k) \qquad \langle k\rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k\, p(k)dk$$

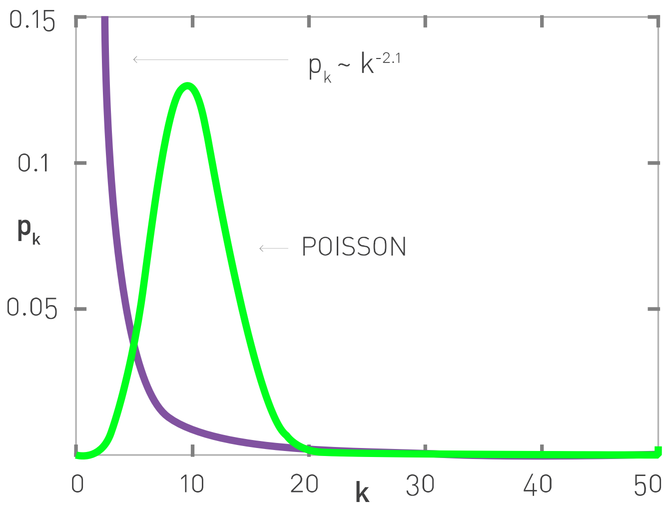
grado medio

$$\langle k^m\rangle = \sum_{k=k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k) \qquad \langle k^m\rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m\, p(k)dk$$

momento orden-m de distr. de grado

# Diferencias entre ley de potencias y Poisson

(a)

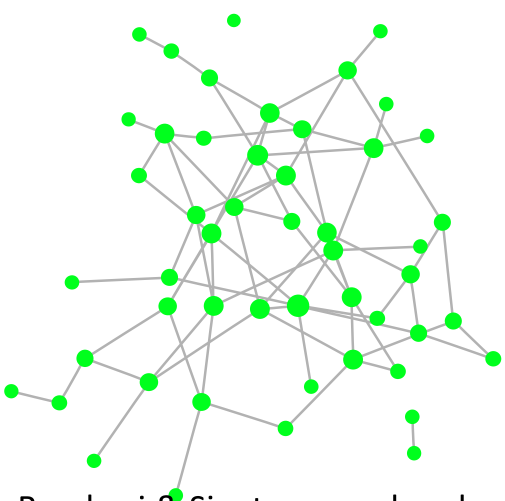



erencias:

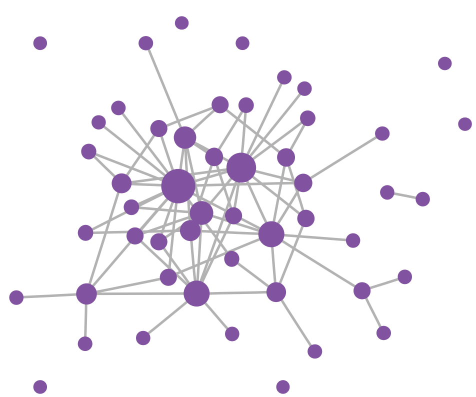
*Exceso* de nodos *k* bajos y altos en LP

Exceso de nodos k~<k> en Poisson

(c)



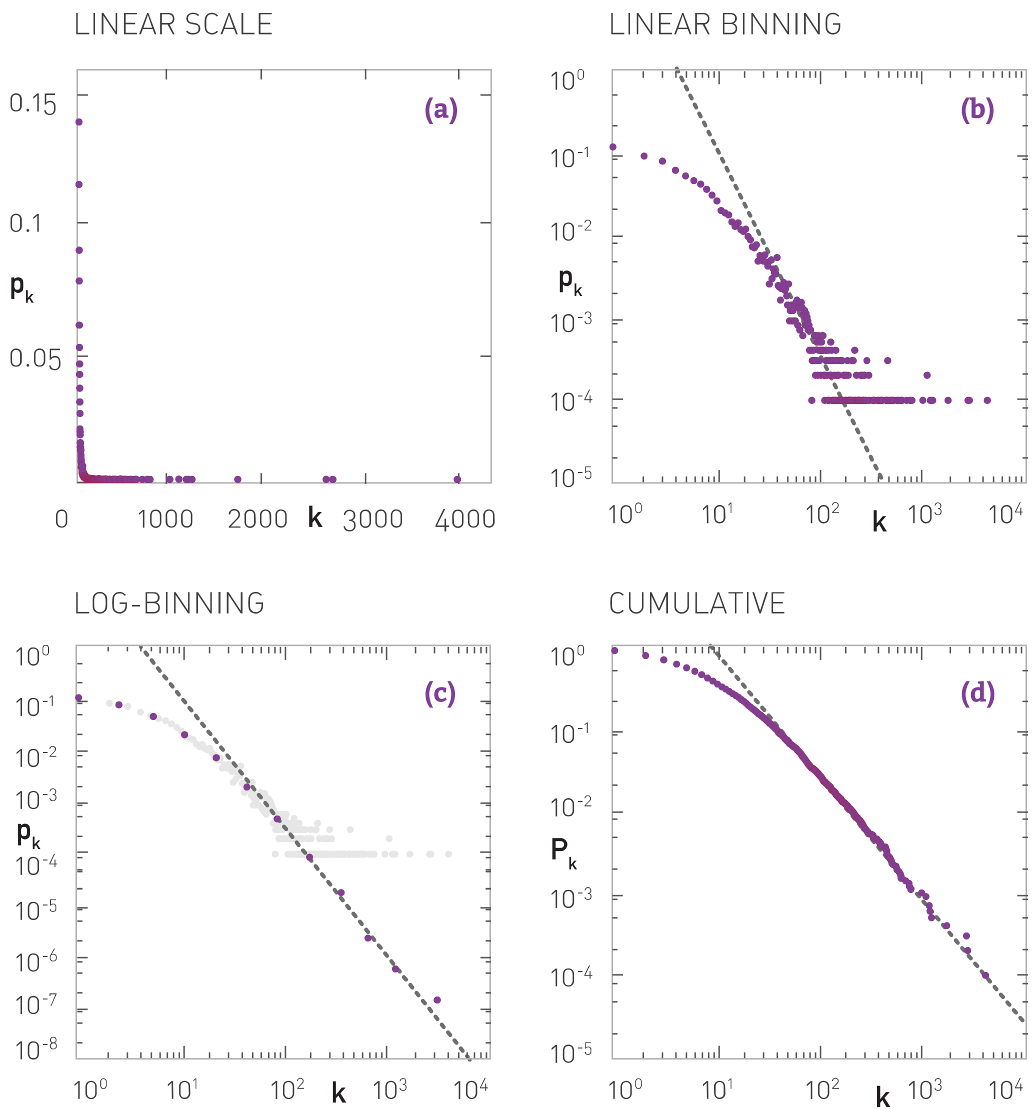
(d)



Adaptado de Barabasi & Sinatra www.barabasilab.com

# Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$$

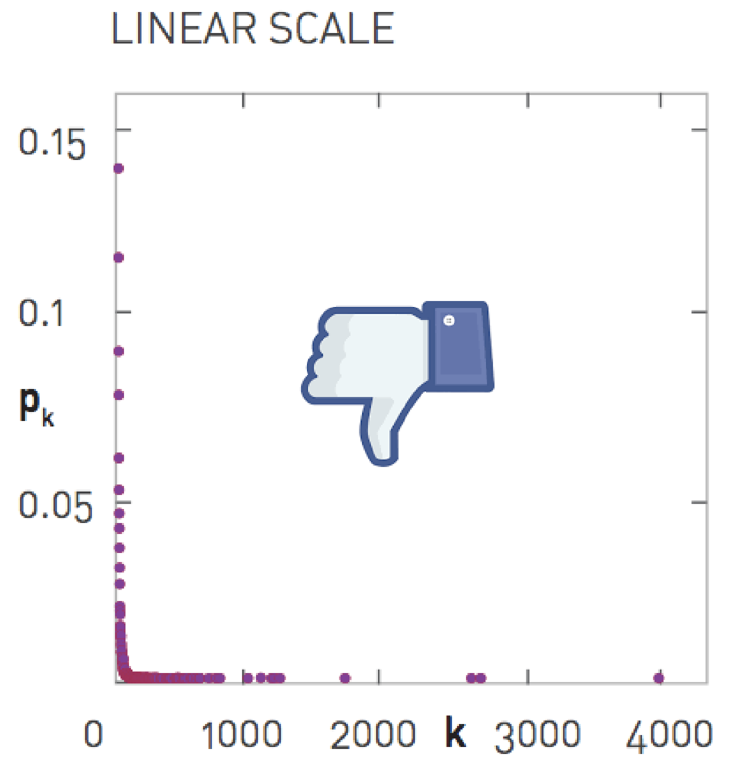


# Visualizando leyes de potencias

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$$

1. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$




El rango de valores posibles de grado hace que se pierda todo detalle

A.-L. Barabási. (2014). *Network Science, Chapter 4*.

# Visualizando leyes de potencias

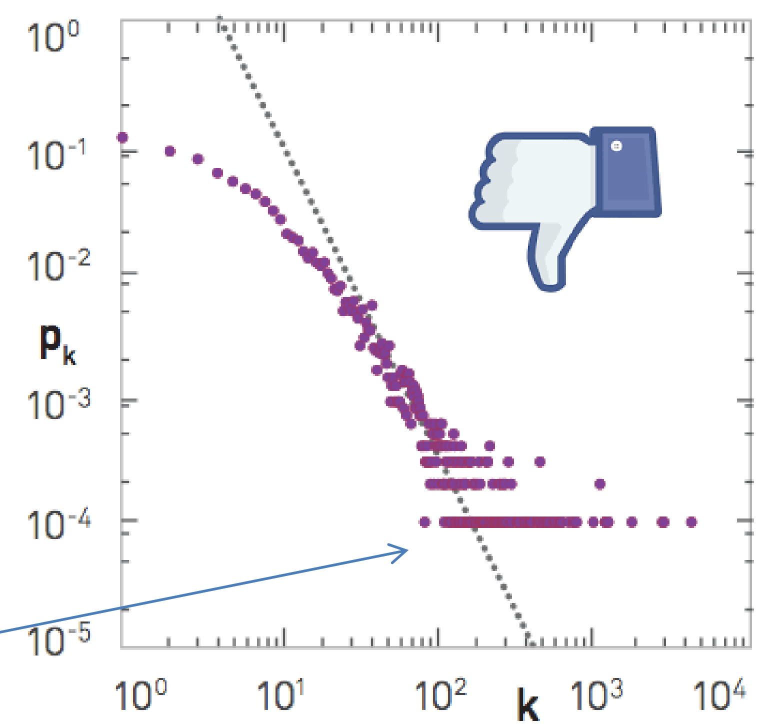
$$(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$$

2. Hacer un histograma de

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

utilizando escalas Log-Log

LINEAR BINNING ($\Delta k$ = 1)




Al usar un Δk fijo (y chico) típicamente aparece un único ejemplo de un dado grado en la región de k-alto, dando lugar a la meseta de eventos 1/N

A.-L. Barabási. (2014). *Network Science, Chapter 4*.

# Visualizando leyes de potencia

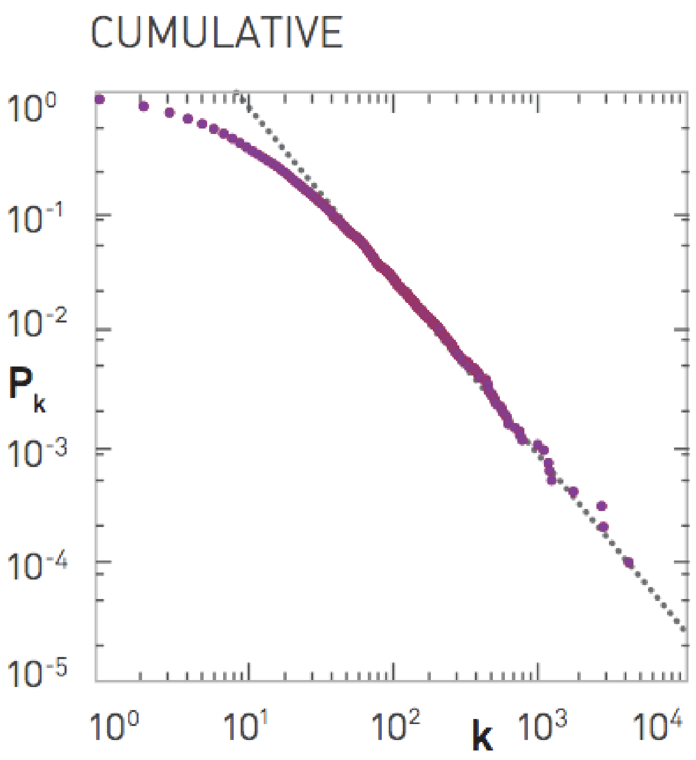
3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma}\, dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$



# Visualizando leyes de potencia

**3.** Función distribución acumulada

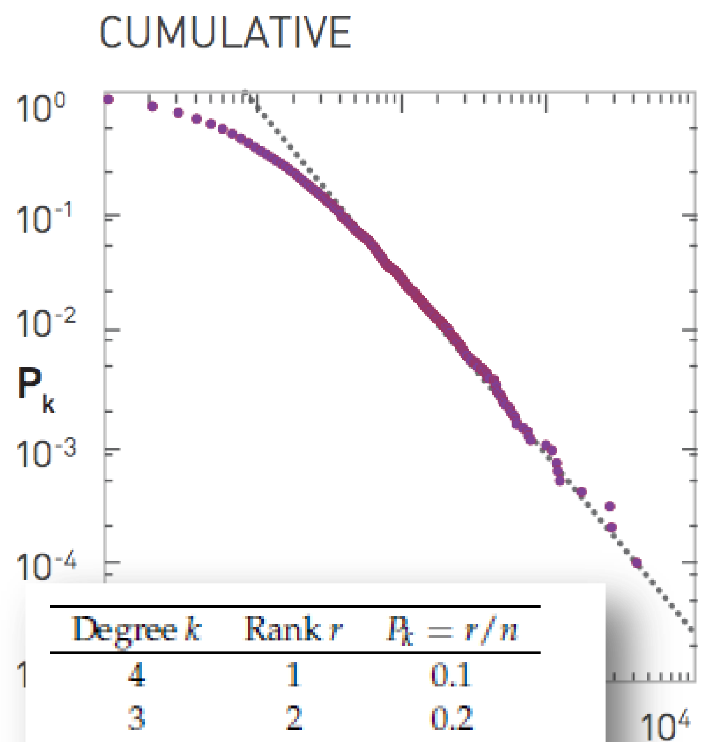
$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C\sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C\int_k^{\infty} k'^{-\gamma}\, dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$

- $P_k$ es fácil de calcular(no hay que binnear)
  - ranking *r de un nodo:* nro de nodos con grado mayor o igual que el
  - $P_k = r_k/N$: fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado $r_k$




| Degree $k$ | Rank $r$ | $P_k = r/n$ |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 0.1 |
| 3 | 2 | 0.2 |
| 3 | 3 | 0.3 |
| 2 | 4 | 0.4 |
| 2 | 5 | 0.5 |
| 2 | 6 | 0.6 |
| 2 | 7 | 0.7 |
| 1 | 8 | 0.8 |
| 1 | 9 | 0.9 |
| 0 | 10 | 1.0 |

# Visualizando leyes de potencia

## 3. Función distribución acumulada

$$P_k = \sum_{q=k}^{\infty} p_q$$

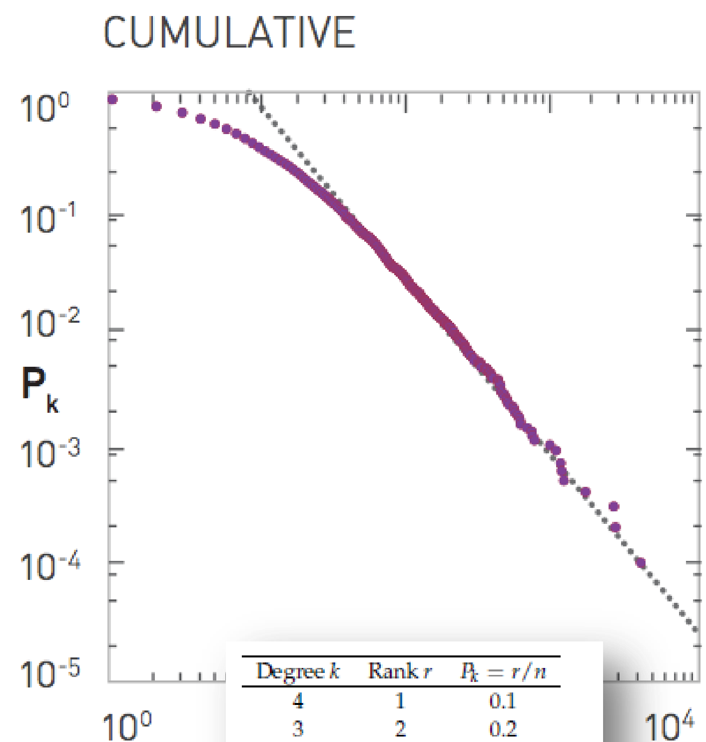
Prob. de encontrar un nodo de grado k o mayor

- si $p_k \sim k^{-\gamma}$ entonces

$$P_k = C \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\gamma} \sim C \int_k^{\infty} k'^{-\gamma}\, dk' = \frac{C}{\gamma - 1} k^{-(\gamma-1)}$$

- $P_k$ es fácil de calcular(no hay que binnear)
  - ranking *r de un nodo:* nro de nodos con grado mayor o igual que el
  - $P_k = r_k/N$: fracción de nodos con grado mayor o igual que el grado rankeado $r_k$
  - Graficamos para cada nodo-i

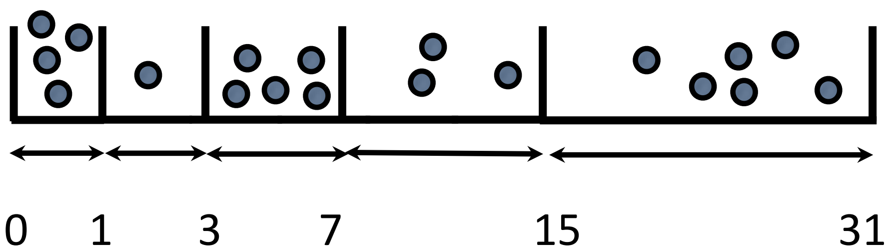
$$P_{k_i} = \frac{r_{k_i}}{N}$$ en función de $k_i$




| Degree $k$ | Rank $r$ | $P_k = r/n$ |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 0.1 |
| 3 | 2 | 0.2 |
| 3 | 3 | 0.3 |
| 2 | 4 | 0.4 |
| 2 | 5 | 0.5 |
| 2 | 6 | 0.6 |
| 2 | 7 | 0.7 |
| 1 | 8 | 0.8 |
| 1 | 9 | 0.9 |
| 0 | 10 | 1.0 |

# Visualizando leyes de potencias

## 4. Bineo logaritmico



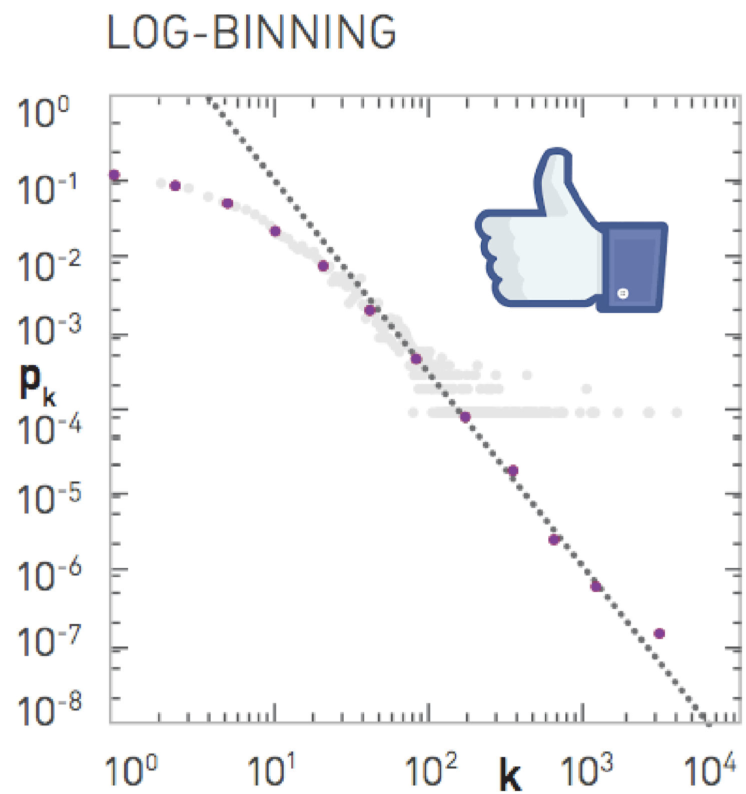

$$b_0 = 1$$

$$b_i = b_{i-1} + 2^i \quad i > 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta b_i &= 2^i \\ \log \Delta b_i &= \log 2 \, . \, i \end{aligned}\right\}$$ Celdas equiespaciadas en escala logaritmica

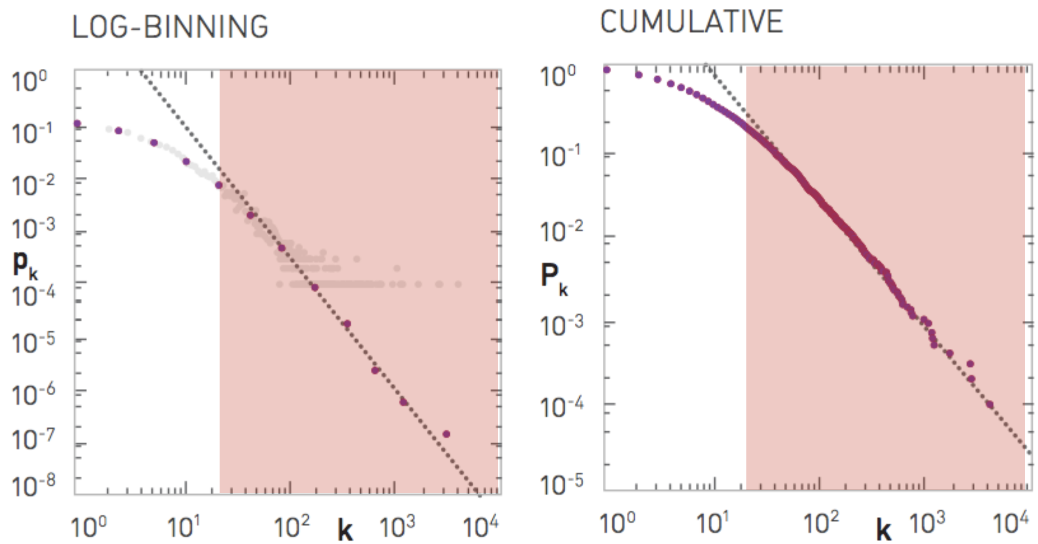
Distribución de grado dada por

$$p(\langle k_i \rangle) = \frac{N_i}{\Delta b_i}$$



# Ajustando leyes de potencia

## La manera **incorrecta** de hacerlo




- Ajuste por mínimos cuadrados de la parte del grafico que **parece** lineal en log-log

$$\log p_k = -\gamma \log k + \text{constant}$$

$$\log P_k = (-\gamma + 1) \log k + \text{constant}$$

# Ajustando leyes de potencia

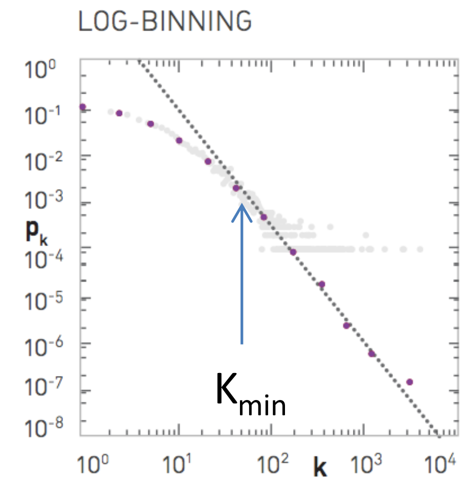
## La manera **incorrecta** de hacerlo

Por qué esta **mal**?

- Las probabilidades tienen que estar normalizadas. Ajustar una linea en un gráfico nunca puede dar una distribución válida.
- Muchas funciones **parecen** lineales en log-log
- Discrepancias en la cola son mas relevantes a la hora del ajuste
- El "método de los 5 puntos basculantes" no es de lo mas recomendable en ciencia

# Ajustando leyes de potencia

## La manera **correcta** de hacerlo




Estimación de parámetros del modelo estadístico de mis datos vía **Maximum-likelihood estimation** (**MLE**)

- Se comienza con la hipótesis

$$p\left(k\right) = Ck^{-\gamma} \quad C = \left(\gamma - 1\right) K_{min}^{\gamma - 1}$$

- Se eligen los parámetros del modelo que maximicen una función de verosimilitud. Prob de observar los datos, dados los parámetros del modelo.

$$\mathcal{L}\left(k|\gamma\right) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\gamma - 1}{K_{min}} \left(\frac{k_i}{K_{min}}\right)^{-\gamma}$$

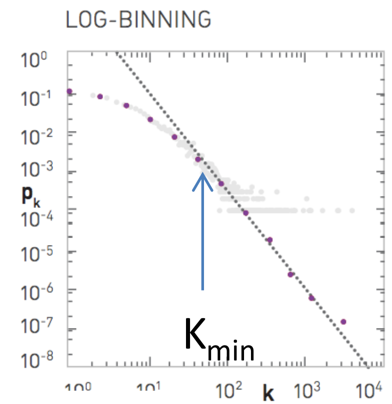
Nota: aca es donde falla usar la cumulative distribution function

- **Para un dado $K_{min}$** se estima el exponente minimizando la función de verosimilitud (derivando respecto a γ)

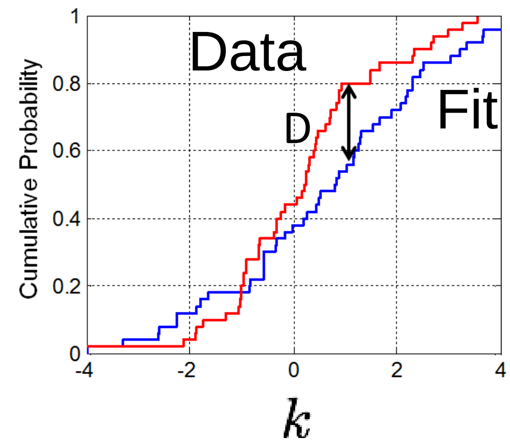
$$\gamma = 1 + N \left[ \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{k_i}{K_{min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1}.$$

# Ajustando leyes de potencia

## La manera **correcta** de hacerlo



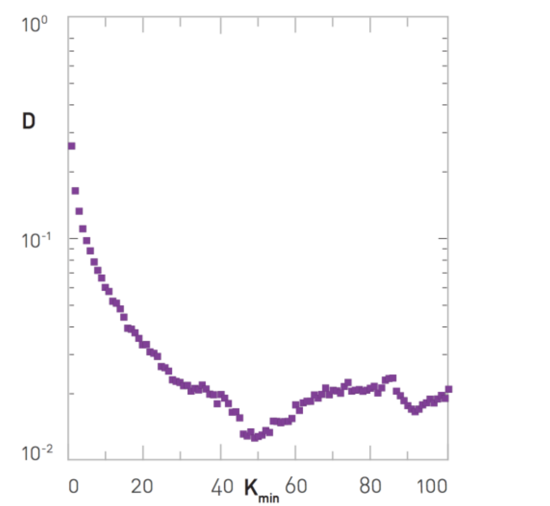

Como estimar $K_{min}$?




- Se calcula la funcion de probabilidad acumulada
  - de los datos, $P_k$
  - del ajuste, $S_k$

- Se estima la distancia máxima entre ambas distribuciones

$$D = \max_{k \geq K_{min}} |S_k - P_k|$$

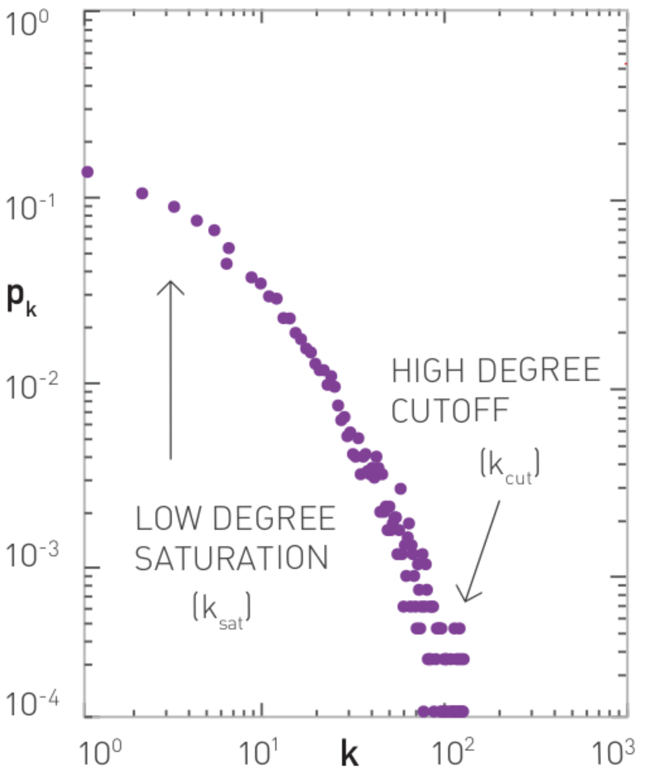



- Se elige el $K_{min}$ que minimiza dicha distancia

- Esto es lo que hace fits_power_law {igraph} (!)

# Ajustando leyes de potencia

## La manera **correcta** de hacerlo



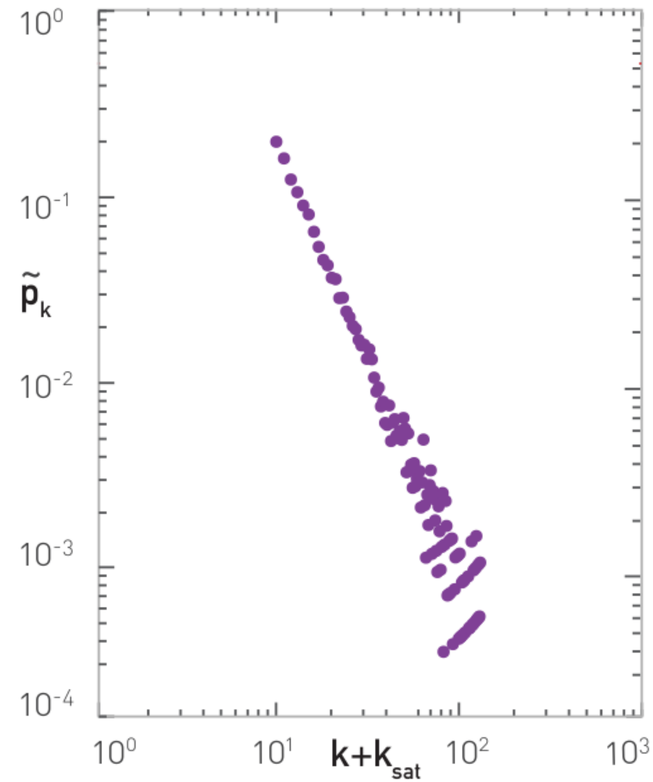

$$p_x = a(k + k_{\text{sat}})^{-\gamma} \exp\left(-\frac{k}{k_{\text{cut}}}\right)$$

$$\tilde{p}_x = p_x \exp\left(\frac{k}{k_{\text{cut}}}\right)$$

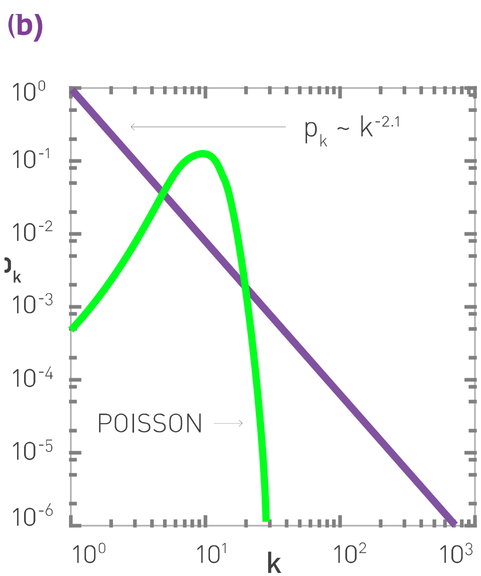
$$\tilde{k} = k + k_{\text{sat}}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{p} \sim \tilde{k}^{-\gamma}$$



# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs




Estimación del grado máximo de la red

Nro de nodos de grado mayor o igual que kmax

$$N_{k \geq kmax} = N \sum_{k \geq kmax}^{\infty} p_k \sim N \int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk$$

<u>Asumimos que tenemos una red cuya distribución de grado sigue una ley dada</u>

Vamos a **pedir** que $k_{max}$ cumpla

$$\underbrace{\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk}_{} = \frac{1}{N}$$

probabilidad de encontrar un nodo con grado mayor a $k_{max}$ x

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado *p(k)*

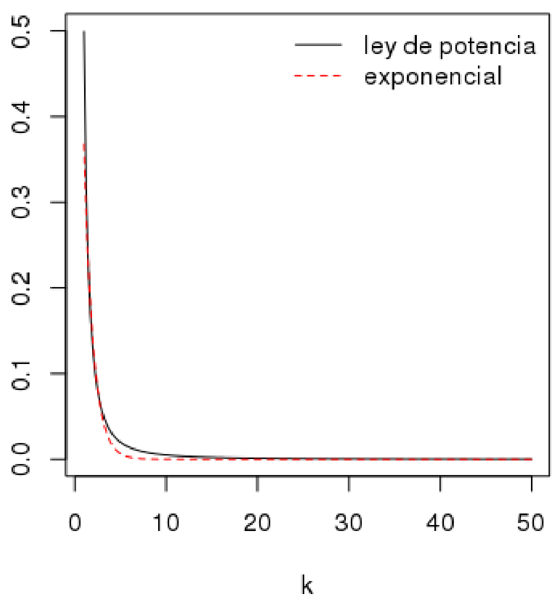
Vamos a pedir que $k_{max}$ cumpla

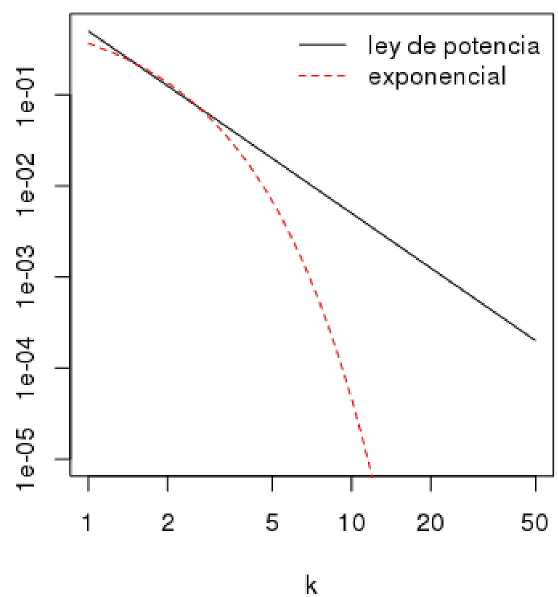
$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

<u>Distribución exponencial</u>

$$p(k) = Ce^{-\lambda k}$$



# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado *p(k)*

Vamos a pedir que $k_{max}$ cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

<u>Distribución exponencial</u>

$$p(k) = \lambda e^{\lambda\, k_{min}}\, e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} \lambda e^{\lambda\, k_{min}}\, e^{-\lambda k}\, dk = \frac{1}{N}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

El hecho de tener un numero finito de nodos, impone una escala para $k_{max}$

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs

Aumimos que tenemos una red con una distribución de grado *p(k)*

Vamos a pedir que $k_{max}$ cumpla

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

Veamos un ejemplo:

Distribución exponencial

$$p(k) = \lambda e^{\lambda\, k_{min}}\, e^{-\lambda k}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} e^{-\lambda k}\, dk = \frac{1}{N\, \lambda e^{\lambda\, k_{min}}}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

Otro ejemplo:

Distribución ley de potencias

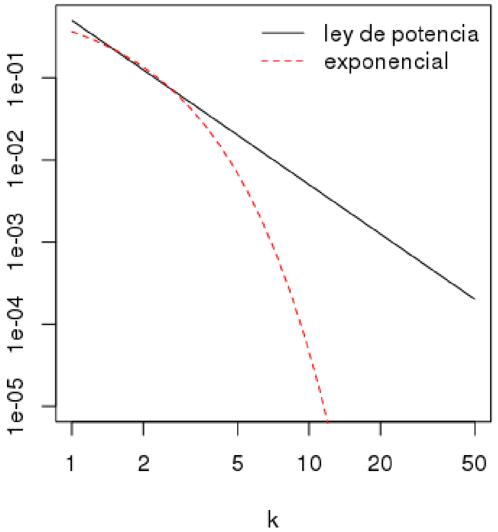
$$p(k) = (\gamma - 1){k_{min}}^{\gamma-1}\, k^{-\gamma}$$

$$\int_{k_{max}}^{\infty} k^{-\gamma} dk = \frac{1}{N(\gamma-1){k_{min}}^{\gamma-1}}$$

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

El hecho de tener un numero finito de nodos, impone una escala para $k_{max}$

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs




<u>Distribución exponencial</u>

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\log N}{\lambda}$$

$k_{max}$ crece de manera **logarítmica** con el tamaño de la red:

$$k_{max} \sim k_{min}$$

<u>Distribución ley de potencias</u>

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$k_{max}$ crece de manera **polinómica** con el tamaño de la red: puede ser **ordenes de magnitud mayor** que $k_{min}$

# Efectos de tamaño finito **para leyes de potencia**

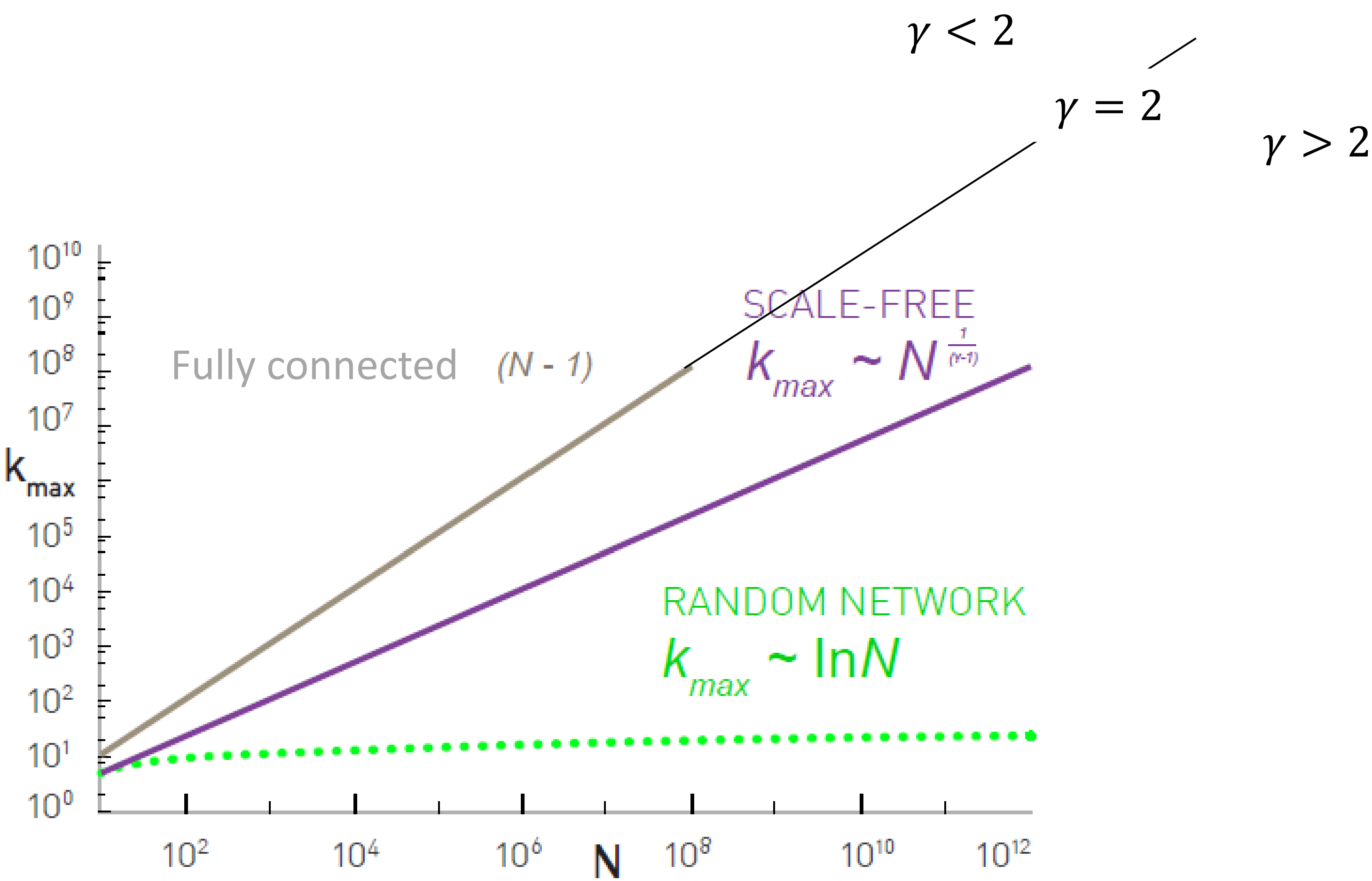
Valor esperado para $k_{max}$

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

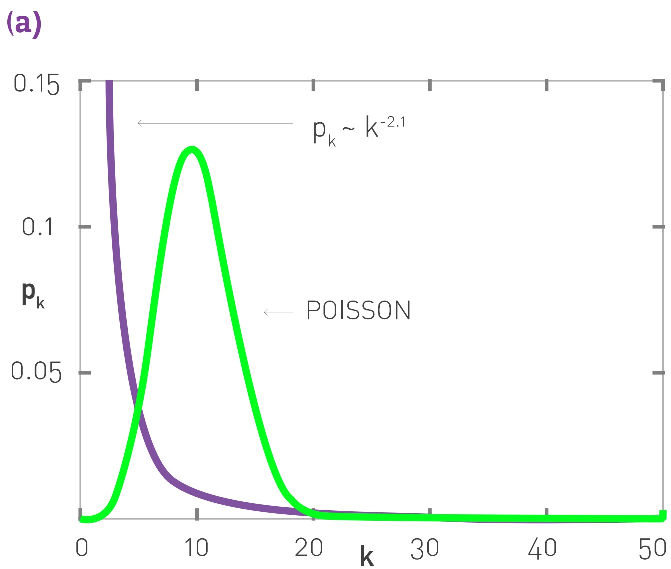
Para una distribución dada tipo ley de potencia, $k_{max}$ aumenta con el tamaño del sistema

- Si γ > 2, $k_{max}$ crece más lento que *N*
- Si γ = 2, $k_{max} \sim N$. El tamaño del mayor *hub es o(N)*
- Si γ < 2, $k_{max}$ crece más rápido que *N.* El hub atrae para sí una fracción creciente de links (comportamiento anómalo)

# Efectos de tamaño finito: tamaño de hubs



# Qué significa libre-de-escala?




$$\langle k^m \rangle = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^m \, p(k) \approx \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^m \, p(k) dk$$

- Conocer todos los momentos de la distribución equivale a conocer la distribución
- Los primeros momentos tienen interpretaciones conocidas

- m=1 corresponde al valor medio de la distribución
- m=2 permite calcular la varianza y desviación estándar σ: $var = \sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$
- m=3 permite calcular el *skewness* $\langle (k - \langle k \rangle)^3 \rangle / \sigma^3$
- …

<u>Para una distribución tipo ley de potencia:</u>

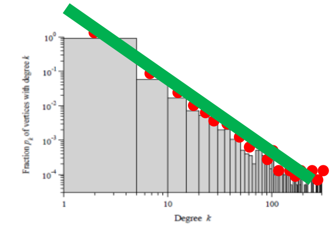
$$\langle k^m \rangle = C \frac{{k_{max}}^{m-\gamma+1} - {k_{min}}^{m-\gamma+1}}{m - \gamma + 1}$$

Para redes grandes ($k_{max} \to \infty$)

- si m-γ+1 ≤0 <k$^m$> resulta finito
- si m-γ+1 >0 <k$^m$> diverge.

**Los momentos de orden m> γ-1 divergen**

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



# Distribuciones libre-de-escala

Para una distribución tipo ley-de-potencia los momentos de orden m> γ-1 divergen

| Network | Size | $\langle k \rangle$ | $\kappa$ | $\gamma_{out}$ | $\gamma_{in}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| WWW | 325 729 | 4.51 | 900 | 2.45 | 2.1 |
| WWW | $4\times10^7$ | 7 | | 2.38 | 2.1 |
| WWW | $2\times10^8$ | 7.5 | 4000 | 2.72 | 2.1 |
| WWW, site | 260 000 | | | | 1.94 |
| Internet, domain* | 3015–4389 | 3.42–3.76 | 30–40 | 2.1–2.2 | 2.1–2.2 |
| Internet, router* | 3888 | 2.57 | 30 | 2.48 | 2.48 |
| Internet, router* | 150 000 | 2.66 | 60 | 2.4 | 2.4 |
| Movie actors* | 212 250 | 28.78 | 900 | 2.3 | 2.3 |
| Co-authors, SPIRES* | 56 627 | 173 | 1100 | 1.2 | 1.2 |
| Co-authors, neuro.* | 209 293 | 11.54 | 400 | 2.1 | 2.1 |
| Co-authors, math.* | 70 975 | 3.9 | 120 | 2.5 | 2.5 |
| Sexual contacts* | 2810 | | | 3.4 | 3.4 |
| Metabolic, *E. coli* | 778 | 7.4 | 110 | 2.2 | 2.2 |
| Protein, *S. cerev.** | 1870 | 2.39 | | 2.4 | 2.4 |
| Ythan estuary* | 134 | 8.7 | 35 | 1.05 | 1.05 |
| Silwood Park* | 154 | 4.75 | 27 | 1.13 | 1.13 |
| Citation | 783 339 | 8.57 | | | 3 |
| Phone call | $53\times10^6$ | 3.16 | | 2.1 | 2.1 |
| Words, co-occurrence* | 460 902 | 70.13 | | 2.7 | 2.7 |
| Words, synonyms* | 22 311 | 13.48 | | 2.8 | 2.8 |

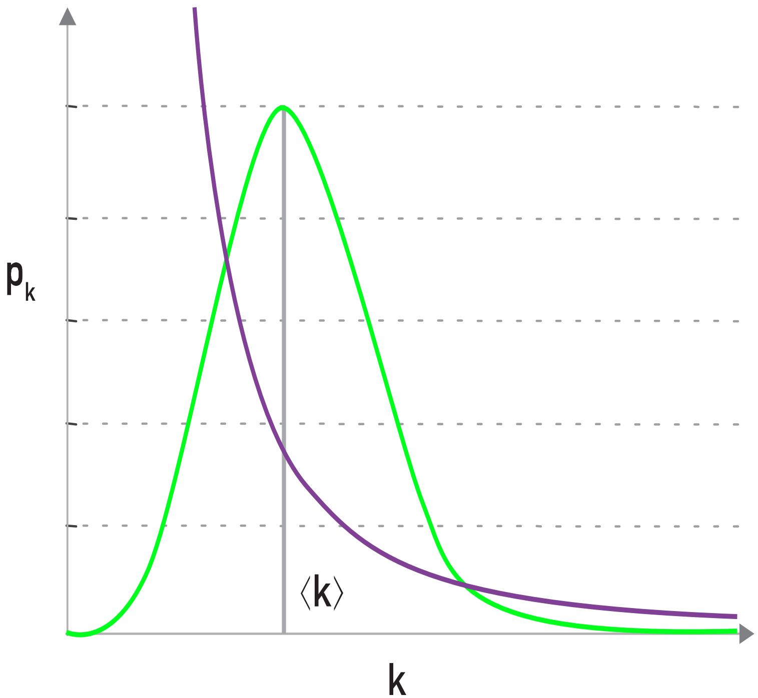
- Muchas redes reales γ<3
- $<k^2>$ diverge en el limite N→∞ !!

$$\langle k^m \rangle = C\,\frac{{k_{max}}^{m-\gamma+1} - {k_{min}}^{m-\gamma+1}}{m-\gamma+1}$$

$$\langle k^2 \rangle = C\,\frac{{k_{max}}^{3-\gamma} - {k_{min}}^{3-\gamma}}{3-\gamma}$$

La variabilidad (fluctuación cuadrática media) tambien diverge $\sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$

# Distribuciones libre-de-escala




Rango donde encontrar valores tìpicos

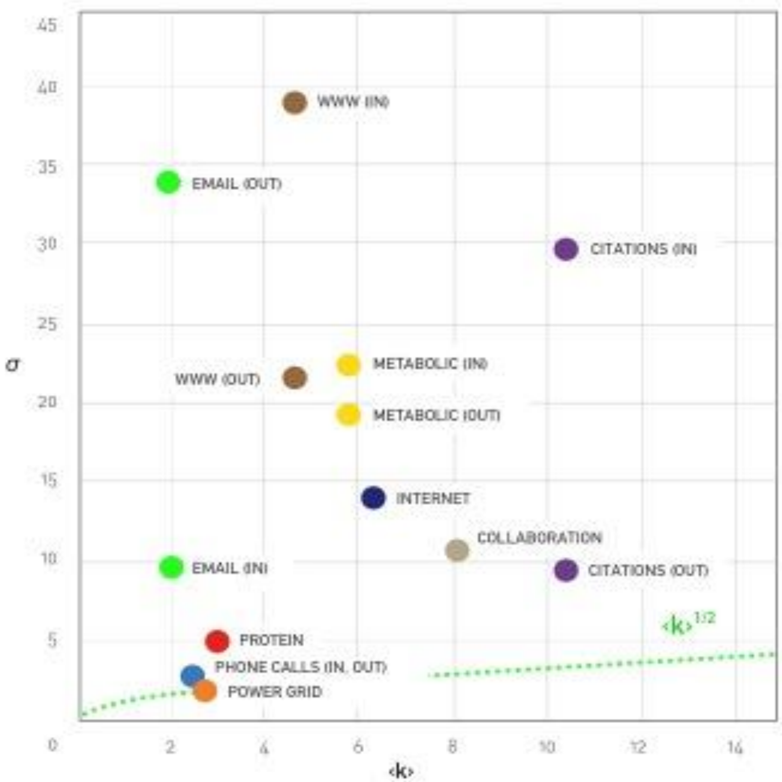
$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

**Random Network**
Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$
Scale: $\langle k \rangle$

**Scale-Free Network**
Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$
Scale: none

Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con γ<3 puede tener valores muy alejados de <*k*>. No existe una escala característica para la conectividad.

# Distribuciones libre-de-escala en redes finitas




Rango donde encontrar valores tìpicos

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k$$

**Random Network**

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$

Scale: $\langle k \rangle$

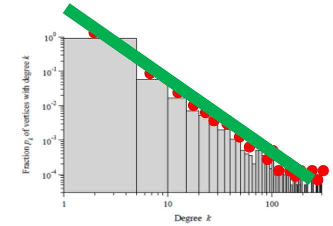
**Scale-Free Network**

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$

Scale: none

Un nodo tomado al azar de una red cuya distrib. de grado sigue una ley de potencia con γ<3 puede tener valores muy alejados de <*k*>. No existe una escala característica para la conectividad.

$\log p_k = -\gamma \log k + c$



# Habiamos visto…

De acuerdo a la distribución de grado las redes pueden clasificarse en

**Redes acotadas exponencialmente:**

- distribución decae para altos valores de *k* exponencialmente o más rapido
- Ausencia de grandes fluctuaciones en el grado [ $\langle k^2\rangle < \langle k\rangle$ ]

**Redes de cola pesada:**

- redes cuya distribución decae como ley de potencia para altos valores de *k*
- Pueden presentarse grandes fluctuaciones en el grado [ $\langle k^2\rangle \gg \langle k\rangle$ ]
- Típicamente presentan outliers (hubs)

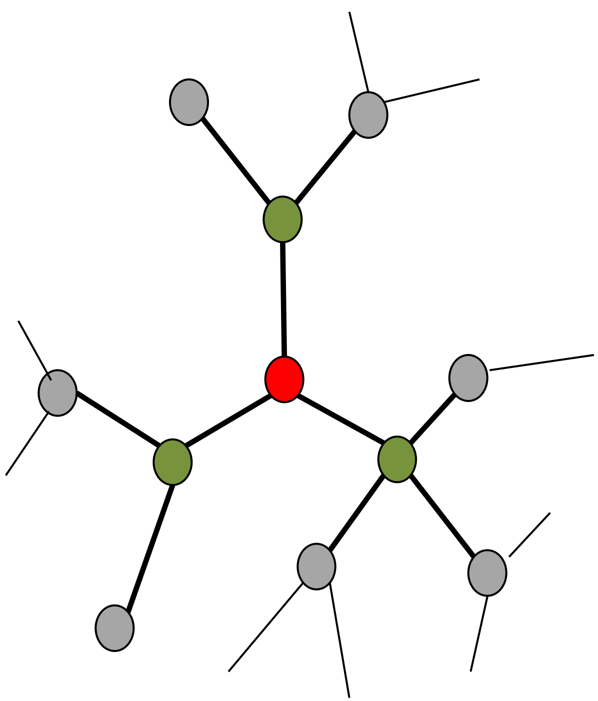
$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

| | $\langle k\rangle$ | $\langle k^2\rangle$ |
|---|---|---|
| $2<\gamma<=3$ | finito | **infinito** |
| $\gamma>3$ | finito | finito |

$$\langle d\rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma=2 \\ \ln\ln N & 2<\gamma<3 \\ \dfrac{\ln N}{\ln\ln N} & \gamma=3 \\ \ln N & \gamma>3 \end{cases}$$

# **Distancias** y **mundo-pequeño** en redes aleatorias (idea)

En redes aleatorias (distribución Poisson) los nodos tienden a tener $k \sim \langle k \rangle$.



- Nro primeros vecinos $\sim\langle k \rangle$
- Nro segundos vecinos $\sim\langle k \rangle^2$
- Nro de vecinos a distancia $s \sim\langle k \rangle^s$

El nro de nodos hasta una distancia *s* resulta

$$N(s) = 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \cdots + \langle k \rangle^s = \frac{\langle k \rangle^{s+1} - 1}{\langle k \rangle - 1}$$

Como máximo N(lmax)=N

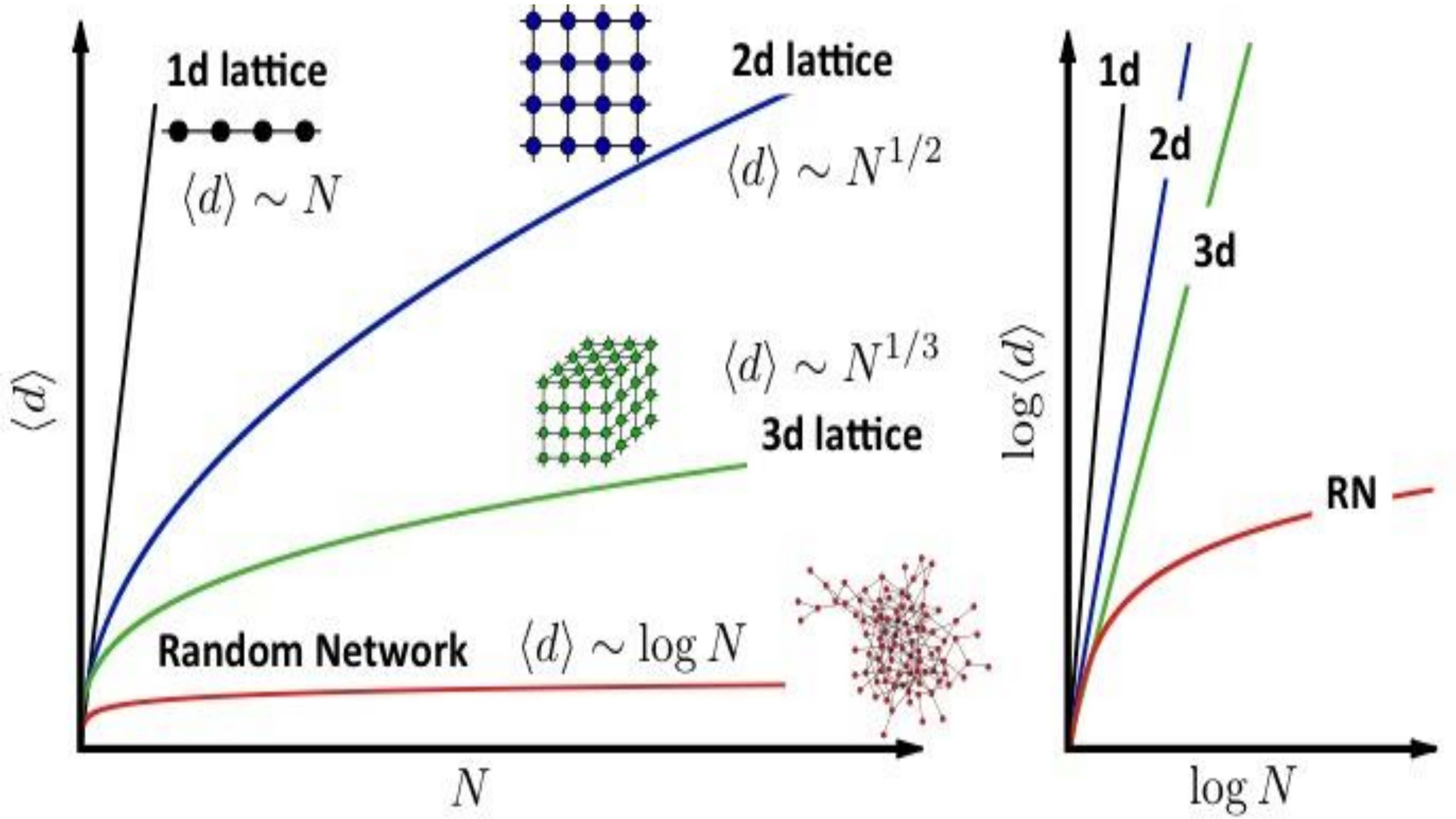
$$N \sim \langle k \rangle^{l_{max}}$$

$$l_{max} \sim \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$

Efecto mundo pequeño

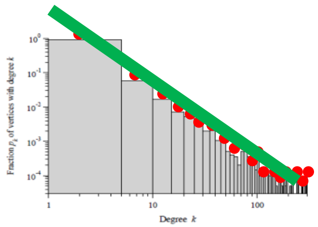
Chung 2001 PNAS Avg distance and expected degree

# Topología de mundos-pequeños



# Distancias en redes libres de escala

$p_k = C\,k^{-\gamma}$




$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2 \\ \ln \ln N & 2 < \gamma < 3 \\ \dfrac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3 \\ \ln N & \gamma > 3 \end{cases}$$

Tamaño hub o(N). Estructura tipo *spoke*. Camino medio independiente del tamaño del sistema

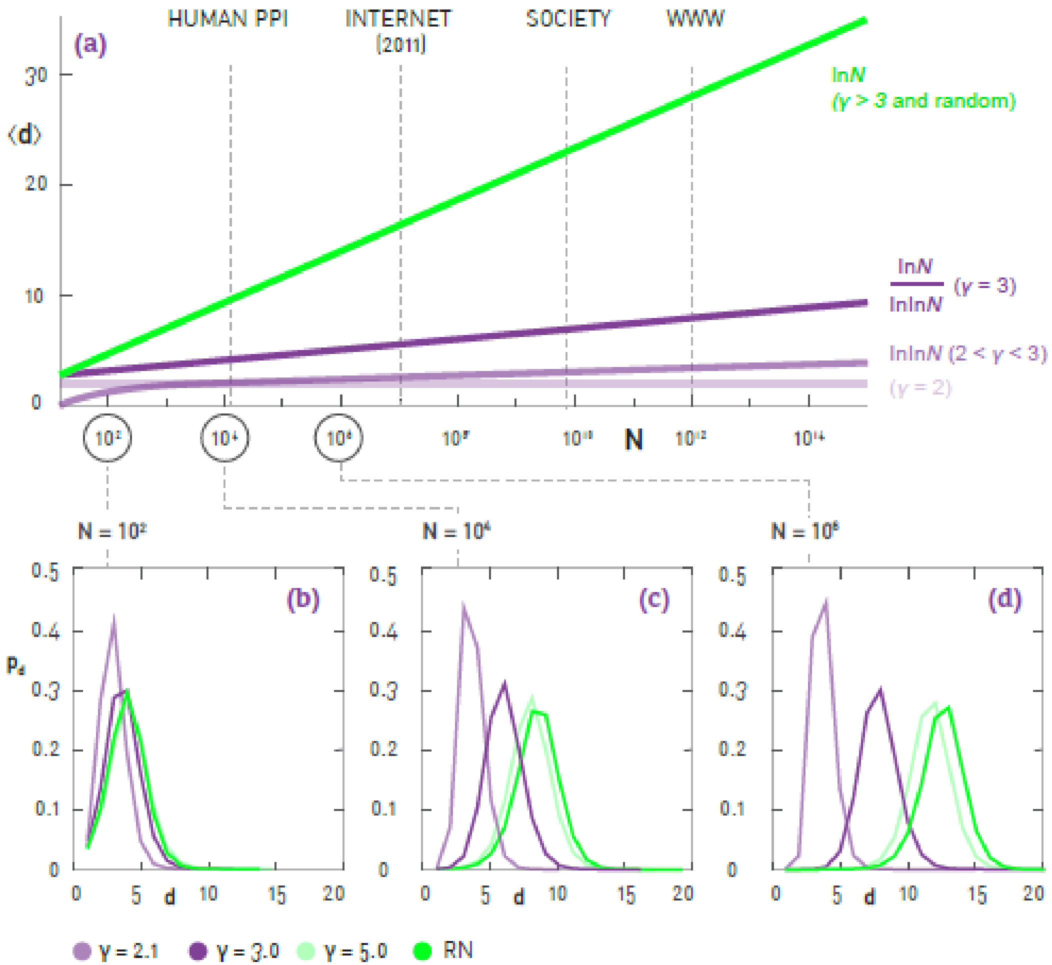
Longitud media aumenta mas lento que log (!) **Ultra-small-world** debido a hubs.

Valor crítico de γ para el cual $<k^2>$ deja de diverger.

$<k^2>$ es finito. No hay suficientes hubs, ni son tan gdes. Se comporta como **small-world r**andom network.

Cohen, Havlin Phys. Rev. Lett. 90, 58701(2003); Cohen, Havlin and ben-Avraham, in Handbook of Graphs and Networks, Eds. Bornholdt and Shuster (Willy-VCH, NY, 2002) Chap. 4; Confirmed also by: Dorogovtsev et al (2002), Chung and Lu (2002); (Bollobas, Riordan, 2002; Bollobas, 1985; Newman, 2001

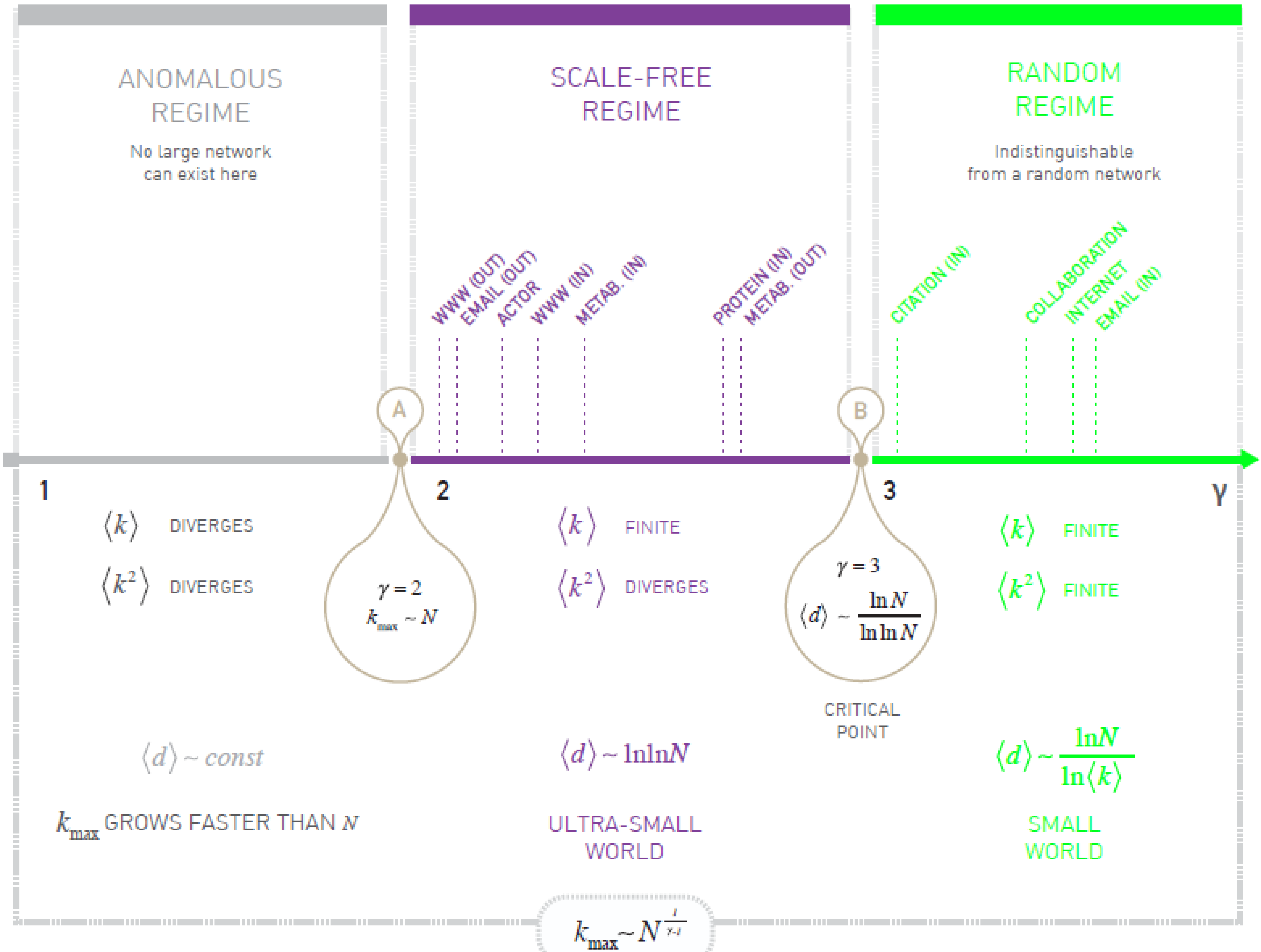
# Distancias en redes libres de escala




$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2, \\ \dfrac{\ln \ln N}{\ln(\gamma - 1)} & 2 < \gamma < 3, \\ \dfrac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3, \\ \ln N & \gamma > 3. \end{cases}$$

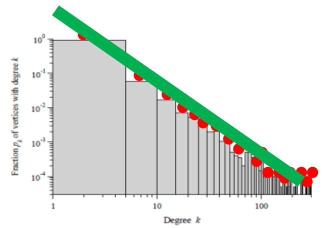
Las diferencias entre diferentes tipos de *escaleo* para las distancias se ponen de manifiesto en redes grandes.

# Exponente crítico



# Leyes de potencia en régimen logN

$p_k = C\, k^{-\gamma}$




Es dificil encontrar redes reales con distribución de grado ley de potencia con γ>3

- Se necesita observar nodos con grados que varíen en al menos 2 (o mejor 3) ordenes de magnitud: $k_{min} \sim 1$, $k_{max} \sim 10^2$

- Pero entonces

$$k_{max} = k_{min}\, N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$N = \left(\frac{k_{max}}{k_{min}}\right)^{\gamma-1} = 10^{2(\gamma-1)}$$

Para reconocer una red con distrib. de grado de exponente γ=5 necesitaría que la misma tuviera al menos $N \sim 10^8$ nodos (!)