

# Astrofísica

1<sup>er</sup> cuatrimestre de 2020

## Guía 9: Cosmología

1. Considere un Universo compuesto por un fluido homogéneo e isótropo de densidad  $\rho$  y velocidad  $\vec{v}$ , que evoluciona en el tiempo  $t$  ( $t = 0$  es el instante actual).

- (a) A partir de la ecuación de continuidad, obtenga la *ley de Hubble*,  $\vec{v} = H(t)\vec{r}$ , donde  $\vec{r}$  es el vector posición y  $H$  es una función del tiempo ( $H_0 = H(0)$  es la *constante de Hubble*). Discuta por qué esto implica que el Universo se está expandiendo, cuál es el origen de coordenadas, y de qué modo puede verificarse observacionalmente esta ley.
- (b) Se define  $R(t)$  mediante  $H(t) = (1/R)dR/dt$ . Calcule, a partir de la ecuación de continuidad, la relación entre  $R$  y  $\rho$ . Discuta cuál es el significado físico de  $R$  y por qué se suele denominar *radio del Universo*. ¿Implica esto que el Universo sea finito y esférico?
- (c) A partir de la ecuación de Euler y de la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio, obtenga la ecuación de movimiento para  $R$ ,

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3} \frac{G\rho_0 R_0^3}{R^2}, \quad (1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal, y  $\rho_0$  y  $R_0$  son la densidad y el radio actuales del Universo, respectivamente.

- (d) Integre una vez la ecuación anterior para obtener

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - k, \quad (2)$$

donde  $k$  es una constante que puede valer 0, 1, o  $-1$ . Discuta por qué no se consideran otros valores de  $k$ .

- (e) Muestre que para  $k = -1$  y 0 el Universo se expande indefinidamente, mientras que para  $k = 1$  alcanza un radio máximo  $R_m = 8\pi G\rho_0 R_0^3/3$  y luego se contrae.
- (f) Definiendo el parámetro de densidad  $\Omega = 8\pi G\rho/3H^2$ , muestre que  $k = 0, 1$  y  $-1$  implican respectivamente  $\Omega_0 = 1, > 1$  y  $< 1$ . Discuta el origen de la relación entre la densidad y la expansión o contracción del Universo.
- (g) El fluido del Universo contiene tanto materia, que ejerce una presión  $p_m$ , como radiación, que ejerce una presión  $p_r$ . Use la ecuación de transporte de calor para mostrar que si  $p_r \ll p_m$ , la temperatura del fluido es  $T \propto R^{-2}$ , mientras que si  $p_r \gg p_m$ ,  $T \propto R^{-1}$ .

## Ejercicios adicionales

2. Considere un Universo infinito, homogéneo, isótropo y eterno. La densidad numérica de galaxias en este Universo es  $n$ , y la función de luminosidad para las galaxias es  $\phi(L)$ , de modo tal  $\phi(L)dL$  es la probabilidad de encontrar una galaxia con luminosidad entre  $L$  y  $L + dL$ , y  $\int_0^\infty \phi(L)dL = 1$ .

- (a) Muestre que la distribución  $\varphi(q)$  del flujo de radiación observado de una galaxia ( $q$ ) es proporcional a  $q^{-3/2}$ , independientemente de la forma de  $\phi(L)$ . Discuta cómo usaría un histograma de flujos de galaxias (número de galaxias observadas con un flujo dado en función del flujo) para estimar una posible variación de  $n$  con la distancia a la Tierra.
- (b) Muestre que el flujo total de radiación recibido en la Tierra es infinito, en clara contradicción con la simple observación de que el cielo es oscuro (*paradoja de Olbers*). ¿Qué posibles soluciones encuentra a esta paradoja?