

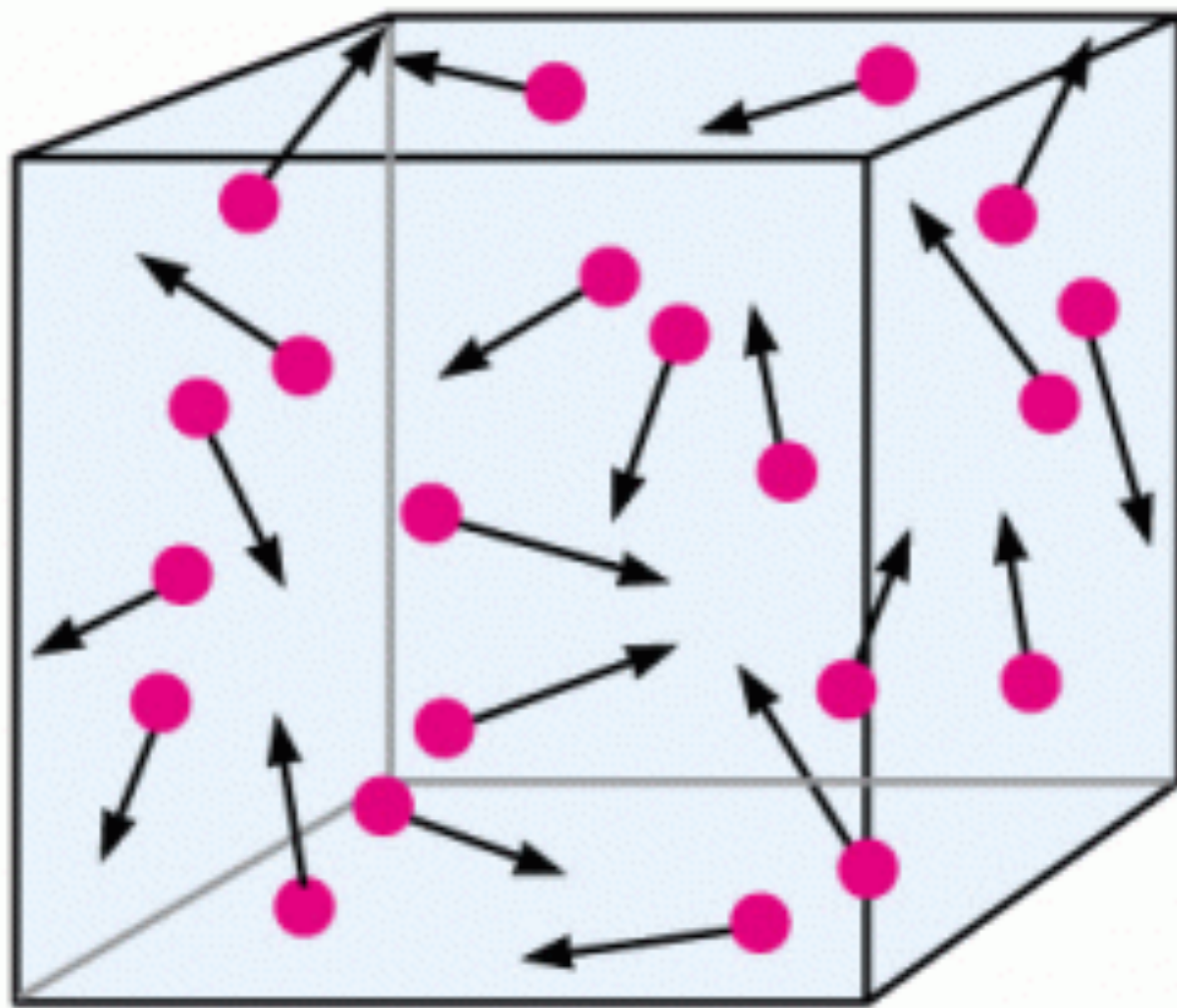
# Clase anterior

- Diagrama de Hertzsprung-Russell: brillo vs color o luminosidad vs temperatura
- Ley de Stefan-Boltzmann
- Secuencia principal, gigantes, supergigantes, enanas blancas
- Enanas marrones: las estrellas mas chicas o los planetas mas grandes
- Sistemas binarios: visuales, eclipsantes, espectroscópicas
- Galaxias: espirales, barradas e irregulares
- Evolución estelar: trayectorias evolutivas



# Teoría cinética

Para describir la dinámica de la materia, recurrimos a la descripción cinética de un gran número de partículas indistinguibles.



$f^s(\underline{r}, \underline{p}, t)$  es la función de distr. de part. de especie  $s$  y  $\int d^3r d^3p f^s(\underline{r}, \underline{p}, t)$  es el número de ellas en entorno  $d^3r$  de  $\underline{r}$  y con impulsos en un entorno  $d^3p$  de  $\underline{p}$  al instante  $t$ .

La densidad de part. es

$$n^s(\underline{r}, t) = \int d^3p f^s(\underline{r}, \underline{p}, t)$$

y la densidad de masa y carga

$$\rho^s(\underline{r}, t) = m_s n^s(\underline{r}, t)$$

$$\rho_c^s(\underline{r}, t) = q_s n^s(\underline{r}, t)$$

$$\rho(\underline{r}, t) = \sum_s \rho^s(\underline{r}, t)$$

$$\rho_c(\underline{r}, t) = \sum_s \rho_c^s(\underline{r}, t)$$

La vel. media:

$$\underline{u}^s(\underline{r}, t) = \frac{1}{n^s(\underline{r}, t)} \int d^3p \underline{v} f^s(\underline{r}, \underline{p}, t) \quad \underline{v} = \frac{\underline{p}}{m_s}$$

La vel. cuadrática media (en el referencial  $\underline{u}^s$ ) la usamos para definir la temperatura  $T^s(\underline{r}, t)$ :

$$\frac{3}{2} k_B T^s(\underline{r}, t) = \frac{m_s}{2} \langle |\underline{v} - \underline{u}^s|^2 \rangle = \frac{m_s}{2n^s} \int d^3p |\underline{v} - \underline{u}^s|^2 f^s(\underline{r}, \underline{p}, t)$$

donde hemos definido el valor medio  $\langle \dots \rangle$  e introducido la constante de Boltzmann  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{K}}$

El momento de orden 0 de  $f^s$  es  $n^s$ , el momento de orden 1 es  $\underline{u}^s$ . El momento de orden 2 es el tensor de presiones:

$$P_{ij}^s(\underline{r}, t) = m_s \int d^3p (v_i - u_i^s)(v_j - u_j^s) f^s(\underline{r}, \underline{p}, t)$$

En equilibrio termodinámico, este tensor se vuelve isotrópico, es decir:

$$P_{ij}^s = p^s \delta_{ij} \xrightarrow[\text{traza}]{\text{tomole}} 3p^s = m_s n^s \langle |\underline{v} - \underline{u}^s|^2 \rangle$$

$$\text{Entonces: } p^s = n^s k_B T^s \quad (\text{gas ideal})$$

Puede seguirse definiendo momentos de órdenes más altos. Por ejemplo el momento de orden 3 se vincula con el flujo de calor:

$$\underline{q}^s = \frac{m_s n^s}{2} \langle |\underline{v} - \underline{u}^s|^2 (\underline{v} - \underline{u}^s) \rangle$$

Hasta aquí son solo definiciones de momentos. Falta lo más importante: de

que manera obtengo la función de distribución  $f^s(\underline{r}, \underline{p}, t)$  para cada especie  $s$ ?



# Ecuación de Boltzmann

En ausencia de colisiones, entre  $t$  y  $t+dt$

$$(r, p, t) \xrightarrow{dt} \left(r + \frac{p}{m} dt, p + F dt, t + dt\right)$$

El número de part. en  $d^3r d^3p$  se conserva

$$d^3r d^3p f(r, p, t) \xrightarrow{dt} d^3r' d^3p' f\left(r + \frac{p}{m} dt, p + F dt, t + dt\right)$$

Para sistemas hamiltonianos, el volumen en el espacio de fases es invariante (teorema de Liouville)

$$d^3r' d^3p' = d^3r d^3p \quad (\text{invariante de Poincaré})$$

Entonces, desarrollando Taylor en  $dt$ :

$$f + dt \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dt p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + dt F \frac{\partial f}{\partial p} = f$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla f + F \cdot \nabla_p f = 0$$

Este es la llamada ecuación de Vlasov, una ecuación cinética en derivadas parciales con 7 variables para  $f(r, p, t)$ .

En esta ecuación las partículas se mueven (sin colisionar entre ellas) bajo la acción de fuerzas de largo alcance  $F$ . Para gases diluidos, se consideran colisiones cuando dos partículas ( $s$ : proyectil y  $s_1$ : blanco) coexisten en  $(r, t)$ .

La ec. Boltzmann da cuenta del efecto de colisiones binarias:

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla f^s + F \cdot \nabla_p f^s = \sum_{s_1} \int d^3p_1 \int d\Omega \sigma_{ss_1}(\Omega) \cdot$$

Ec. Boltzmann

$s$ : proyectil

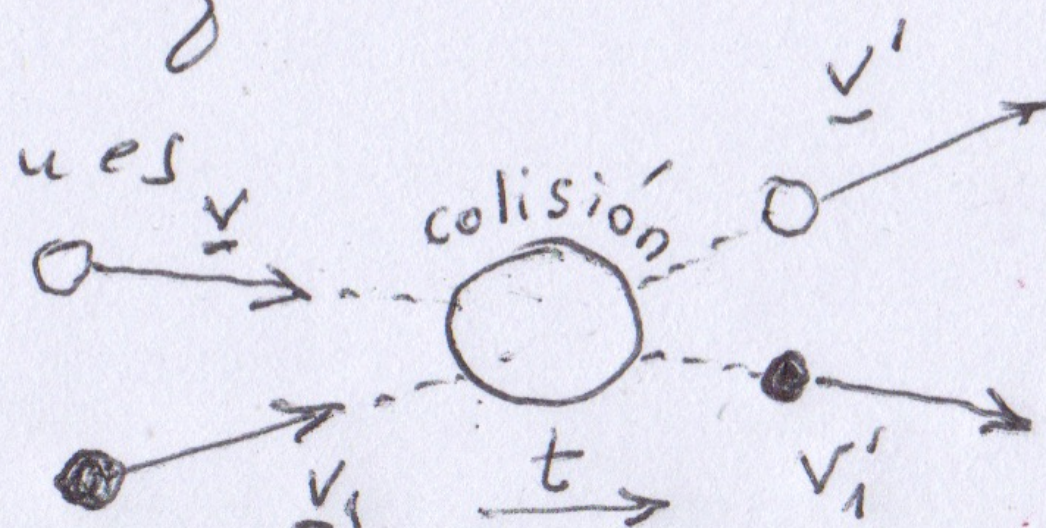
$s_1$ : blanco

$d\Omega \sigma(\Omega)$ : sección eficaz diferencial

$d\Omega = d\varphi d\theta \sin\theta$ : dif. ángulo sólido

$f$ : antes

$f'$ : después





# Distribución de Maxwell-Boltzmann

- Nos han enseñado que un gas clásico relaja por colisiones a una distribución maxwelliana. Entonces, esta distribución debería ser una solución de la ecuación de Boltzmann.
- En ausencia de fuerzas de largo alcance  $\underline{F}$  se tiene un equilibrio estacionario y homogéneo, que anula el lado izquierdo de la ecuación.
- Para anular el término colisional:  $f \cdot f_1 = f' \cdot f'_1$
- Como en colisiones elásticas se conservan el impulso y la energía cinética, entonces  $\log f = C_0 + \underline{C}_1 \cdot \underline{v} + C_2 v^2$
- Las cinco constantes se pueden obtener en términos de los primeros momentos  $n$ ,  $\underline{u}$  y  $T$ :  $f(\underline{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m |\underline{v} - \underline{u}|^2}{2k_B T}\right)$
- Con esto probamos que la maxwelliana es una solución de equilibrio, pero no que desde cualquier estado inicial se relaja a ella.

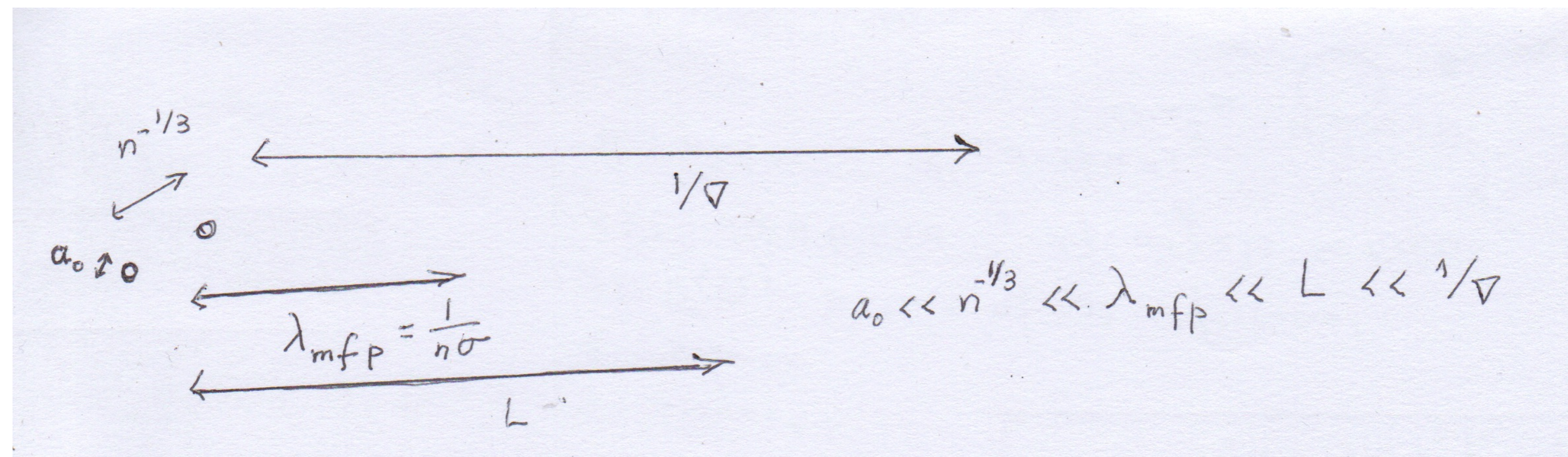
## Teorema H de Boltzmann

Definimos  $H(\underline{r}, t)$  como  $H = \int d^3p f \log f$ . Si  $f$  evoluciona a través de la ecuación de Boltzmann en ausencia de gradientes y fuerzas

externas, entonces: (a)  $\frac{dH}{dt} \leq 0$ ; (b) si  $f = f_{MB}$

entonces  $\frac{dH}{dt} = 0$ .

- Un corolario inmediato del teorema es que desde cualquier estado inicial  $H$  disminuye hasta valer cero al alcanzar la maxwelliana.
- Se supone el siguiente ordenamiento de longitudes características:





# Descripción hidrodinámica

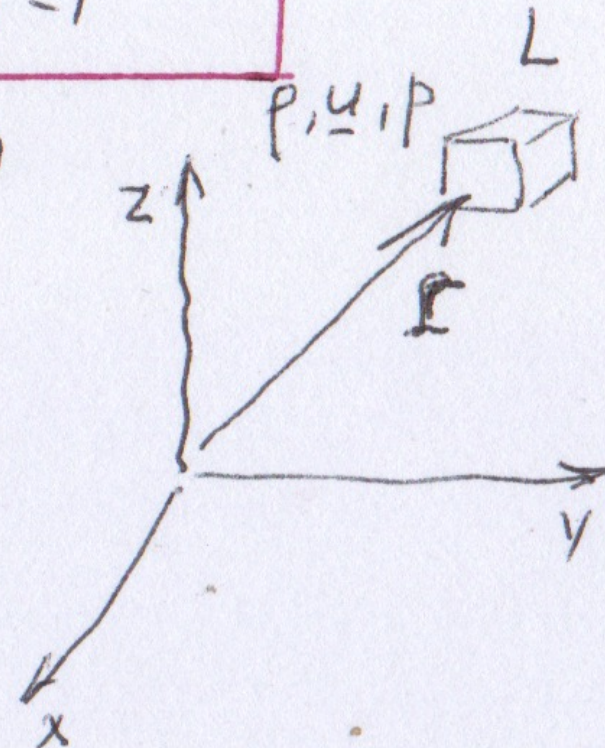
- A escalas mucho mayores que el camino libre medio, la **hidrodinámica** provee una descripción adecuada del movimiento de la materia.
- Las ecuaciones HD corresponden a los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann. Para interpretar estas ecuaciones, se recurre a la noción de **elemento de fluido**, que es suficientemente grande como para contener muchas partículas y a la vez mucho mas pequeño que las longitudes de interés (la longitud  $L$  del diagrama anterior).

Ecuación de continuidad

$$\int d^3p \, m \text{ (Boltzmann)} \rightarrow \boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0}$$

donde  $\rho = mn$ : densidad de masa

Noten que la masa del sistema no cambia por colisiones y por lo tanto el término colisional no aporta.



Ecuación de movimiento

$$\int d^3p \, p \text{ (Boltzmann)} \rightarrow \boxed{\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla \cdot \underline{P} + n \underline{F}}$$

donde hemos introducido la notación

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla A$$

(total)      (parcial)      (convectiva)

$\frac{d}{dt}$ : referencial del fluido  
 $\frac{\partial}{\partial t}$ : referencial del labo

Ecuación de energía

$$\int d^3p \, \frac{mv^2}{2} \text{ (Boltzmann)} \rightarrow \boxed{\frac{3}{2} n k_B \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} - \underline{P} : \nabla \underline{u}}$$

Estas ecuaciones requieren condiciones de clausura.

Aproximación de fluido ideal

$$\underline{P} = p \underline{I}$$

$$\underline{q} = 0$$

Flujo incompresible

La ec. continuidad puede escribirse  $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{u}$

Incompresible si  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . ( $\rho$  permanece constante en el referencial del fluido)

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho \iff \nabla \cdot \underline{u} = 0$$



# Teorema del virial

- Para estrellas u objetos esféricos cohesionados gravitatoriamente, se propone un equilibrio estático ( $\underline{u} = 0$ ) entre la fuerza gravitatoria (atractiva) y la fuerza de presión (repulsiva).
- Esto presupone que las energías térmica y gravitatoria deben resultar comparables.

En esféricas:

$$p \frac{du}{dt} = 0 = - \frac{\partial p}{\partial r} \hat{r} - p \frac{GM_r}{r^2} \hat{r}$$

donde  $M_r = \int_0^r dr 4\pi r^2 \rho(r)$  es la masa contenida en esfera de radio  $r$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = - \frac{\rho GM_r}{r^2}$$

Si multiplicamos por  $4\pi r^3$  e integramos en toda la estrella de radio  $R$ :

$$\int_0^R dr 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} = \int_0^R dr 4\pi r^3 \left( - \frac{\rho GM_r}{r^2} \right)$$

Integrando el lado izquierdo por partes ( $p(R) = 0$ )

$$- \int_0^R dr 4\pi r^2 (3p) = \int_0^R dr 4\pi r^2 \left( - \frac{\rho GM_r}{r} \right) \quad (*)$$

donde  $E_G = \int_0^R dr 4\pi r^2 \left( - \frac{GM_r \rho}{r} \right)$  : energía gravitatoria

• Para un gas ideal  $p = n k_B T$

•  $\frac{3}{2} k_B T$  es la energía térmica por partícula de un gas monoatómico. Entonces la energía térmica es

$$E_T = \int_0^R dr 4\pi r^2 \left( \frac{3}{2} n k_B T \right)$$

La ecuación (\*) resulta:

$$- 2 E_T = E_G \longrightarrow \boxed{2 E_T + E_G = 0}$$

Teorema del virial

Noten que  $E_G \leq 0$ , entonces

$$E_T = - \frac{1}{2} E_G = \frac{1}{2} |E_G|$$

y la energía total del sistema resulta

$$E = E_T + E_G = \frac{E_G}{2} = - \frac{1}{2} |E_G| \leq 0$$



# Equilibrio hidrostático

- Como primera aplicación, veamos dos tipos de equilibrios hidrostáticos ( $\mathbf{u} = 0$ ).
- Caso a: fluido incompresible (agua  $\rightarrow$  océanos).      Caso b: fluido ideal isotérmico (aire  $\rightarrow$  atmósfera).

Caso a ( $z \leq 0$ )

$\rho_0 = \text{cte}$  (incompresible)

$$\hat{z}: 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g$$

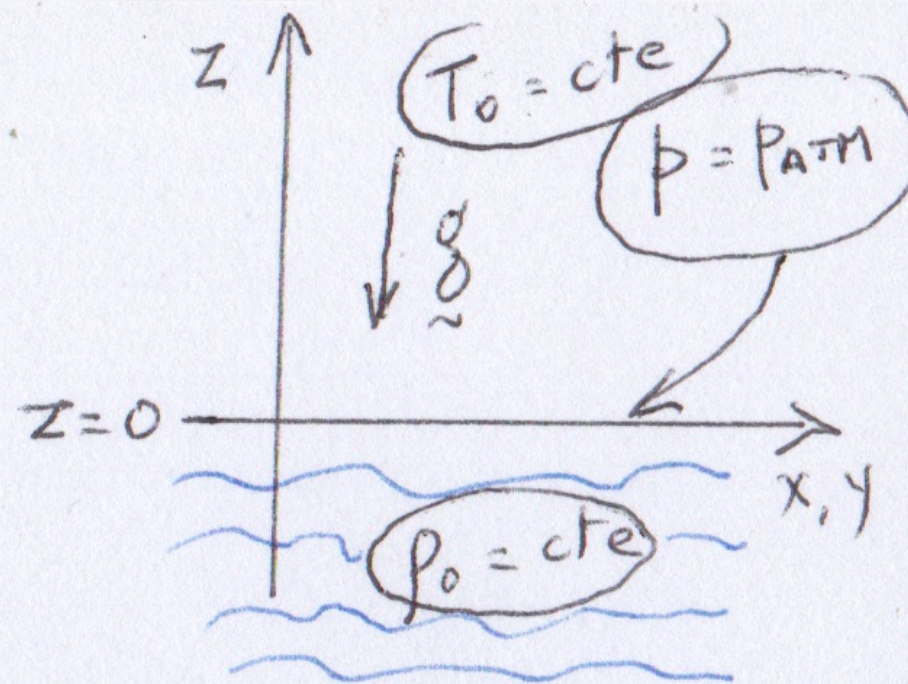
$$\hat{x, y}: 0 = -\nabla_{\perp} p \rightarrow p = p(z)$$

$$\therefore p = -\rho_0 g z + \text{cte}$$

Para determinar la cte de integración, usamos que en la superficie tenemos equilibrio con la atmósfera:

$$p(z=0) = p_{\text{ATM}} \rightarrow p(z) = p_{\text{ATM}} - \rho_0 g z$$

Es decir que la presión crece linealmente con la profundidad ( $-z$ ).



Caso b ( $z \geq 0$ )

El aire no es incompresible, pero podemos suponer un gas ideal isotérmico

$$p = \rho \frac{k_B T_0}{m}$$

$m$ : masa molecular media del aire

$$\hat{z}: 0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g$$

$$\rho = \frac{m}{k_B T_0} p \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{k_B T_0} dz = -\frac{dz}{H}$$

$$H = \frac{k_B T_0}{mg} : \text{escala de alturas}$$

$$\therefore p(z) = p_{\text{ATM}} e^{-z/H} \quad \rho(z) = \frac{m p_{\text{ATM}}}{k_B T_0} e^{-z/H}$$

La presión y densidad de la atmósfera decrecen exponencialmente en alturas del orden de

$$H = \frac{k_B T_0}{mg}$$



# Atmósfera convectiva

- Supongamos ahora una atmósfera en estado estacionario con flujos solo en la dirección vertical.
- El movimiento vertical conlleva una forma de transporte de energía llamado convectorio.

Ec. cont.:  $\partial_z (n u) = 0$

Ec. mov.:  $p(z) \approx p_0 e^{-z/H}$   
(para flujos subsónicos  
 $\rho \frac{du}{dt} \ll -\partial_z p$ )

Ec. energía:  $\frac{3}{2} n k_B u \frac{\partial T}{\partial z} = -p \frac{\partial u}{\partial z}$   
(sup.  $\tilde{q} \approx 0$ )

Ec. estado:  $p = n k_B T$

Entonces:

$$\frac{u'}{u} + \frac{n'}{n} = 0$$

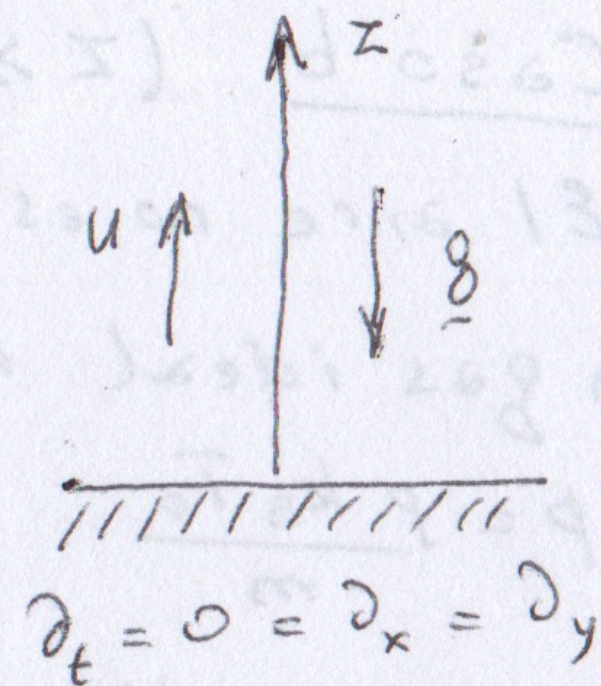
$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} + \frac{T'}{T} = -\frac{1}{H}$$

$$\frac{3}{2} n k_B u' T' + p u' \left( \frac{1}{H} + \frac{T'}{T} \right) = 0$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2mg}{5k_B} = -\frac{g}{c_p}$$

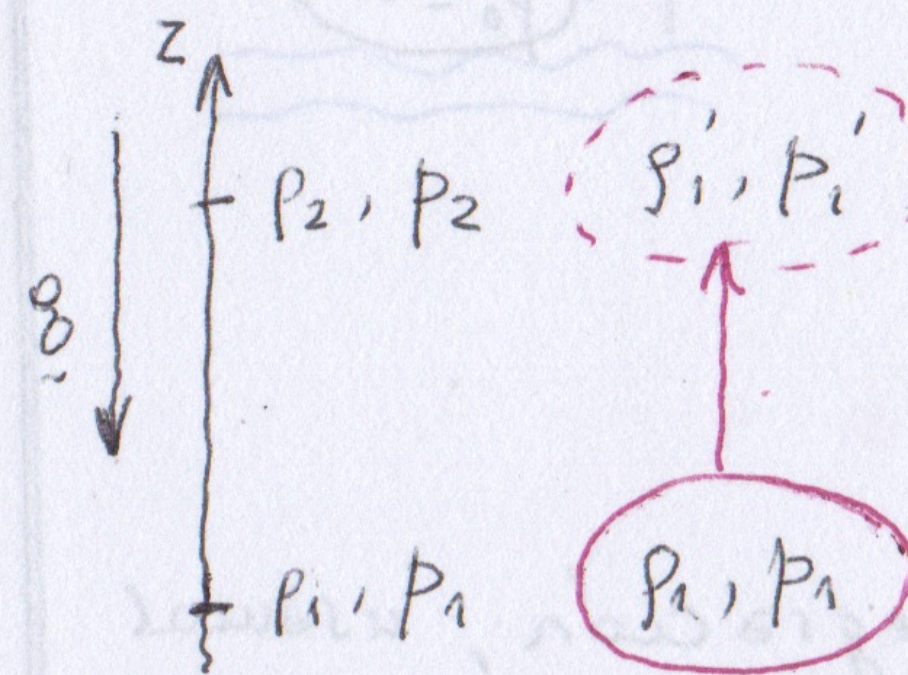
En el referencial del fluido

$$\frac{dT}{dt} = u \frac{dT}{dz} = -\frac{gu}{c_p}$$



$$\frac{dT}{dt} = -\frac{gu}{c_p} \rightarrow \begin{array}{l} u > 0 \text{ (ascenso)} \rightarrow \frac{dT}{dt} < 0 \text{ (se enfría)} \\ u < 0 \text{ (descenso)} \rightarrow \frac{dT}{dt} > 0 \text{ (se calienta)} \end{array}$$

## CRITERIO DE SCHARZSCHILD



- Supongamos que una gota con  $(p_1, p_1)$  asciende a una zona con  $(p_2, p_2)$  tomando valores  $(p_1', p_1')$ .
- Sup. que inmediatamente alcanza balance de presión  $p_1' = p_2$
- Sup. que asciende adiabáticamente  $p_1' = p_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma}$

El criterio de Schwarzschild establece

- $p_1' > p_2 \rightarrow$  estable (peso  $>$  empuje)
- $p_1' < p_2 \rightarrow$  inestable (peso  $<$  empuje)

En el segundo caso se pone en marcha una inestabilidad convectorio.