

Clase anterior

- Repaso de conceptos básicos de teoría cinética: función de distribución y momentos.
- Ecuación de Boltzmann
- Distribución de Maxwell-Boltzmann
- Teorema H de Boltzmann: relajación colisional a distribución maxwelliana
- Repaso de conceptos básicos de dinámica de flúidos
- Teorema del virial
- Ejemplos de hidrostática: atmósferas incompresible e isotérmica

Atmósfera convectiva

- Supongamos ahora una atmósfera en estado estacionario con flujos solo en la dirección vertical.
- El movimiento vertical conlleva una forma de transporte de energía llamado convectivo.

Ec. cont.: $\partial_z (n u) = 0$

Ec. mov.: $p(z) \approx p_0 e^{-z/H}$
(para flujos subsónicos
 $\rho \frac{du}{dt} \ll -\partial_z p$)

Ec. energía: $\frac{3}{2} n k_B u \frac{\partial T}{\partial z} = -p \frac{\partial u}{\partial z}$
(sup. $\tilde{q} \approx 0$)

Ec. estado: $p = n k_B T$

Entonces:

$$\frac{u'}{u} + \frac{n'}{n} = 0$$

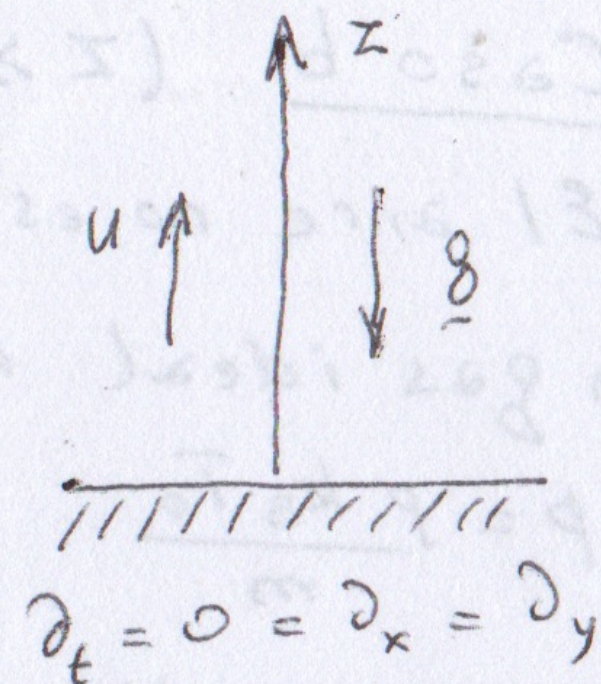
$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} + \frac{T'}{T} = -\frac{1}{H}$$

$$\frac{3}{2} n k_B u' T' + p u' \left(\frac{1}{H} + \frac{T'}{T} \right) = 0$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2mg}{5k_B} = -\frac{g}{c_p}$$

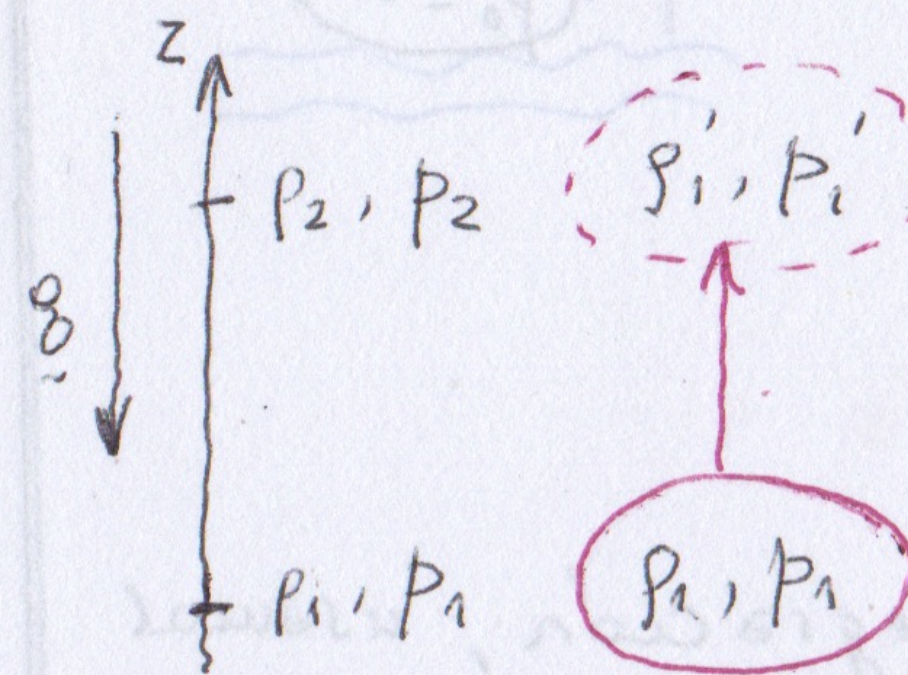
En el referencial del fluido

$$\frac{dT}{dt} = u \frac{dT}{dz} = -\frac{gu}{c_p}$$



$$\frac{dT}{dt} = -\frac{gu}{c_p} \rightarrow \begin{array}{l} u > 0 \text{ (ascenso)} \rightarrow \frac{dT}{dt} < 0 \text{ (se enfría)} \\ u < 0 \text{ (descenso)} \rightarrow \frac{dT}{dt} > 0 \text{ (se calienta)} \end{array}$$

CRITERIO DE SCHARZSCHILD



- Supongamos que una gota con (p_1, p_1) asciende a una zona con (p_2, p_2) tomando valores (p_1', p_1') .
- Sup. que inmediatamente alcanza balance de presión $p_1' = p_2$
- Sup. que asciende adiabáticamente $p_1' = p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma}$

El criterio de Schwarzschild establece

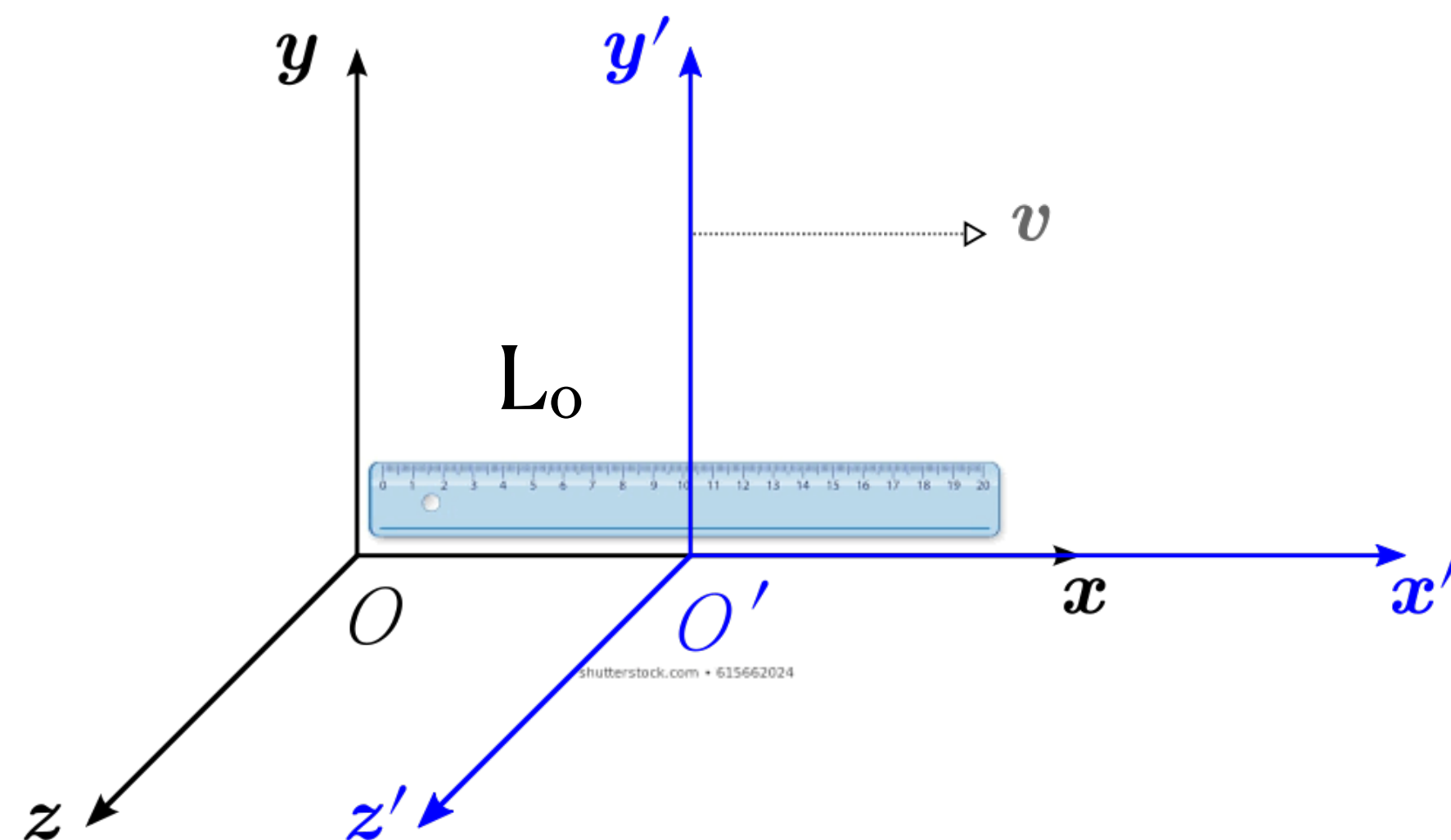
- $p_1' > p_2 \rightarrow$ estable (peso $>$ empuje)
- $p_1' < p_2 \rightarrow$ inestable (peso $<$ empuje)

En el segundo caso se pone en marcha una inestabilidad convectiva.

Teoría especial de la relatividad



- En Mecánica Clásica damos por hecho que: (a) el tiempo es absoluto e independiente del observador, (b) la longitud de un objeto es una propiedad intrínseca del mismo.
- Asimismo, afirmamos que las leyes de la Mecánica son las mismas para todo **observador inercial**, y las conversiones de coordenadas cumplen las **transformaciones de Galileo**.
- La velocidad de la luz **c**, sin embargo, es independiente del observador y no sigue las transf. Galileo.
- Albert Einstein (1905) enuncia la *Teoría Especial de la Relatividad*, basada en estos postulados:
 - (1) *Las leyes físicas (Mecánica, Óptica, EM, ...) valen en todos los sistemas inerciales.*
 - (2) *La luz se propaga en vacío con una velocidad definida c, independiente de la fuente emisora.*

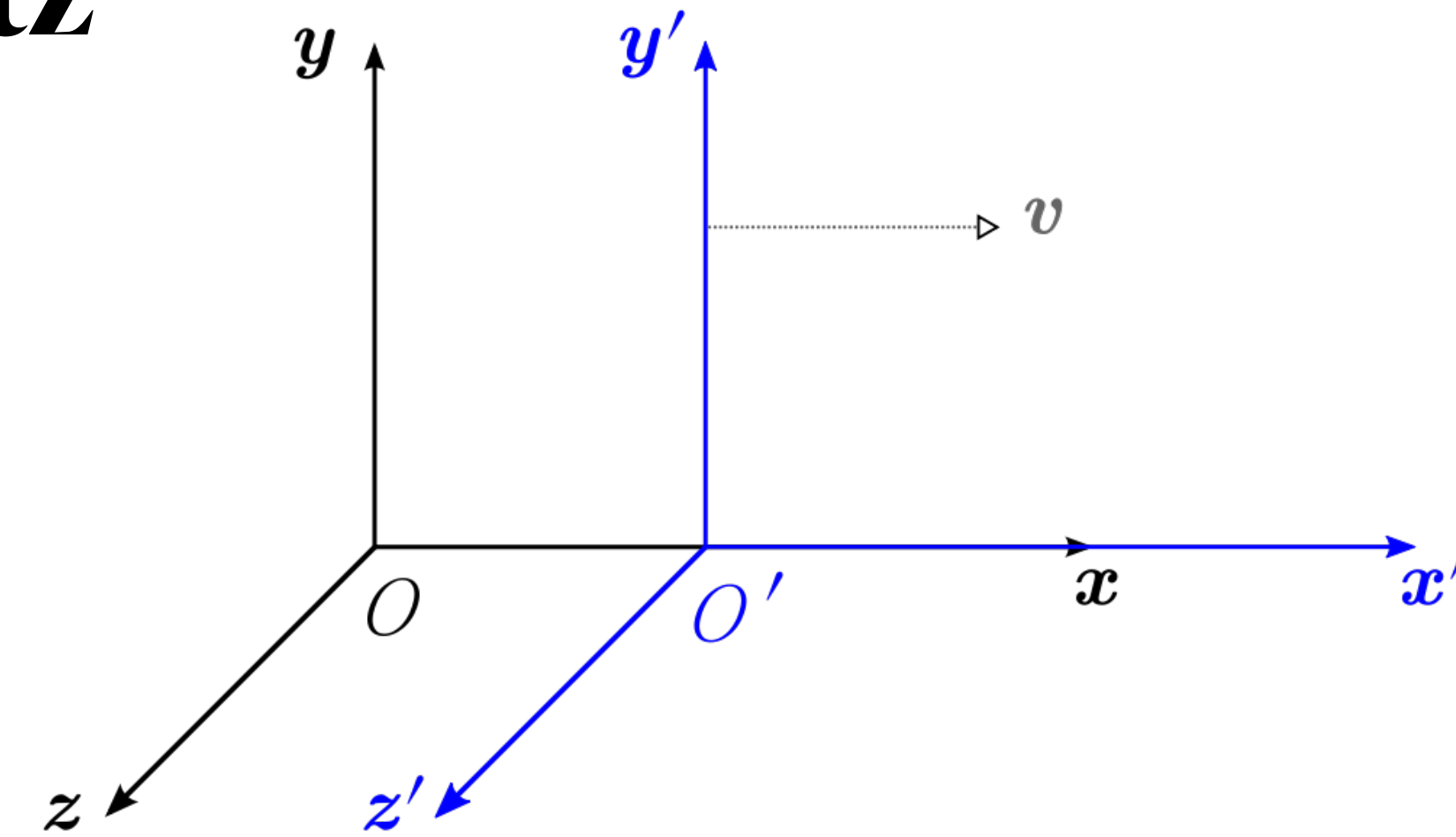


- Tenemos una regla de longitud L_0 en reposo para el observador O. Esa es la **longitud propia** de la regla, porque fue medida en un sistema en reposo.
- O' se mueve a velocidad $v = \text{cte}$ respecto de O. El observador O mide el tiempo entre que O' cruza uno y otro extremo de la regla y obtiene $T = \frac{L_0}{v}$.
- O' ve la regla moviéndose a $-v$. El tiempo que mide entre los extremos de la regla es $T_0 = \frac{L}{v}$. La longitud que observa O' es L, no es la longitud propia. En cambio T_0 es el **tiempo propio**, ya que fue medido en el sistema en reposo (en el origen de O').
- De lo anterior se infiere que $\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L}$, pero $\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L} \neq 1$ en general.

Transformación de Lorentz

- En Mecánica Clásica suponemos que $T=T_0$, lo cual implica también que $L=L_0$.
- Suponiendo homogeneidad espacial y temporal además de isotropía, ambos cocientes solo pueden ser función de v , la cual puede determinarse por experimentos y obtener que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L} = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



- **Dilatación temporal:** $T = T_0 \gamma(v)$ significa que el tiempo T entre dos eventos medido por un observador moviéndose con v , es mayor que el tiempo propio T_0 .
- **Contracción de longitudes:** $L = L_0/\gamma(v)$ significa que la longitud L de un objeto medido por un observador moviéndose con v , es menor que la longitud propia L_0 .

De lo anterior se deducen las transformaciones de Lorentz que rigen los cambios de coordenadas entre observadores inerciales:

$$x' = \gamma(v) (x - vt)$$

$$t' = \gamma(v) \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Para la transf. inversa basta invertir los roles entre los observadores

$$\left. \begin{array}{l} x, t \longleftrightarrow x', t' \\ v \longleftrightarrow -v \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = \gamma(v) (x' + vt') \\ t = \gamma(v) \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \end{array}$$

Si $x(t)$ es la posición de un punto, su velocidad es $u_x = \frac{dx}{dt}$. Para el observador O' es $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$

Diferenciando las relaciones anteriores

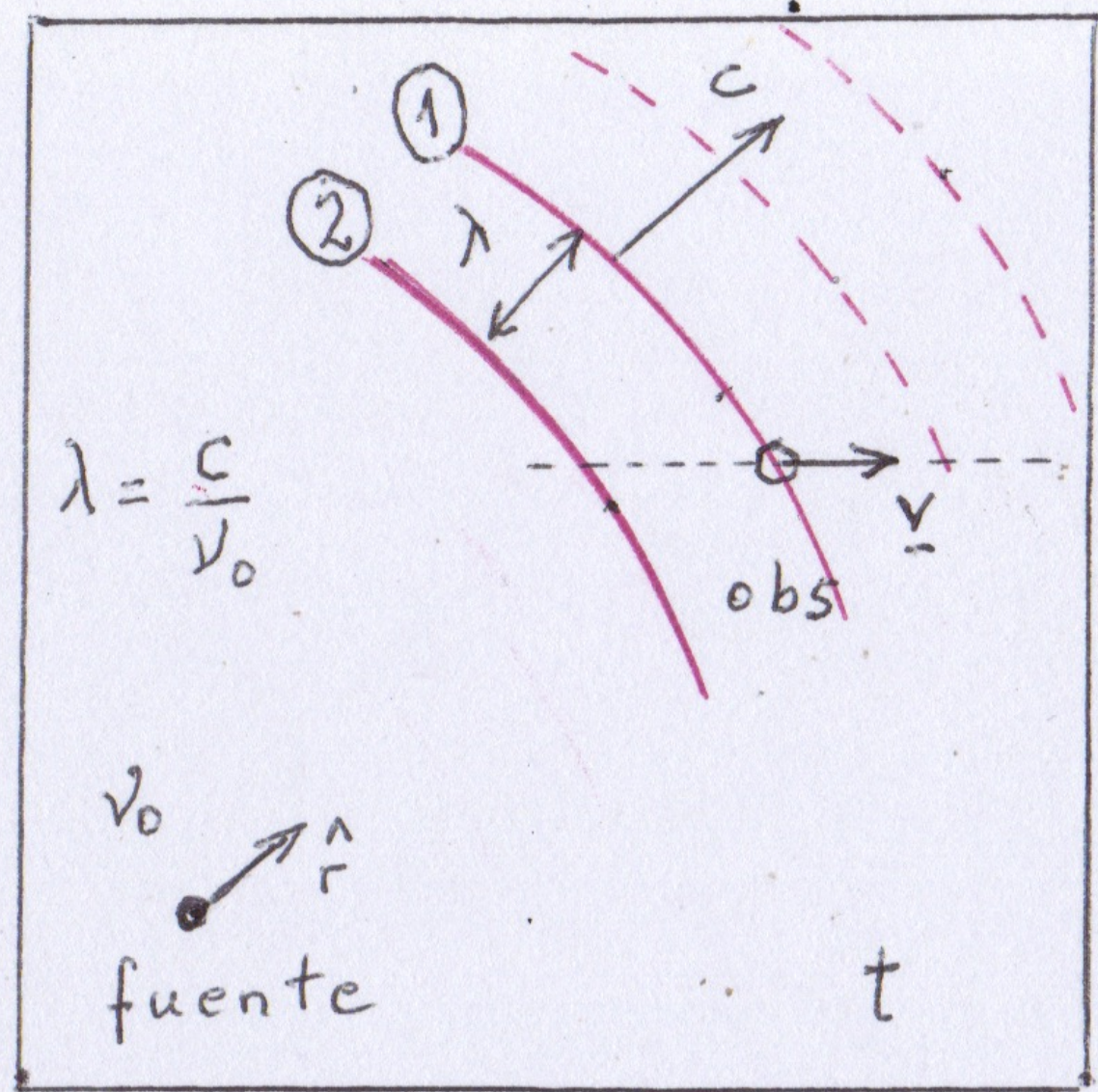
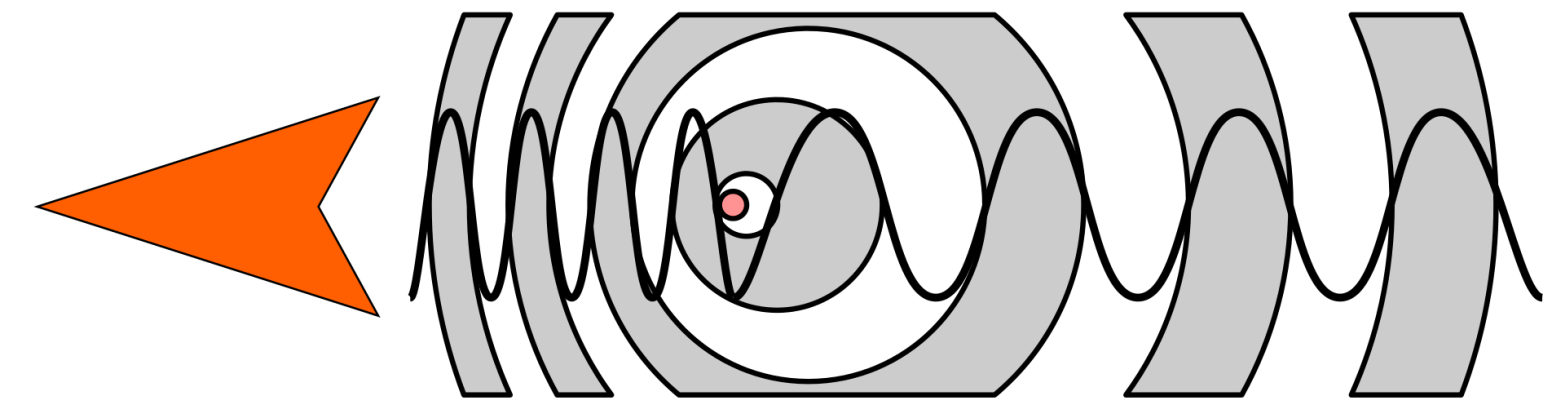
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

Noten que como $dt' \neq dt$, también se modifican las otras componentes de la velocidad

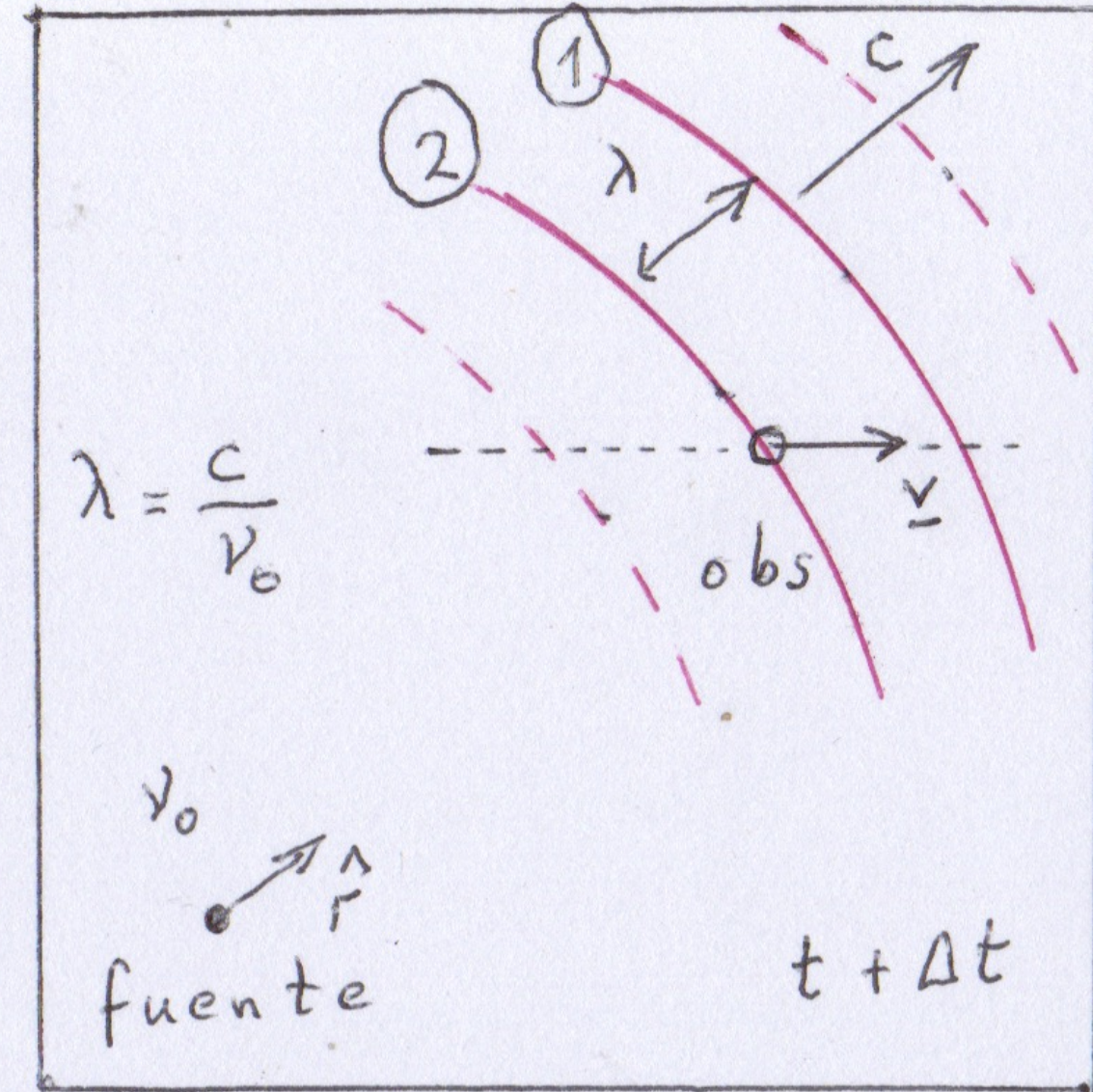
$$u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)}$$

Efecto Doppler

- El efecto Doppler (1842) corresponde a un cambio de frecuencia cuando la fuente se mueve respecto del observador. Ocurre para cualquier fenómeno ondulatorio (sonido, luz, ...).
- Es un fenómeno clásico, pero que tiene correcciones en el límite relativista $v \approx c$.
- Supongamos una fuente luminosa que emite frentes esféricos a la **frecuencia propia** ν_0 .



El observador se mueve con $\underline{v}$ y es alcanzado por el frente (1).



Un Δt después, observador y frentes se desplazan y el obs. es alcanzado por (2).

Por lo tanto: $c \Delta t = \lambda + \underline{v} \cdot \hat{r} \Delta t$ $\xrightarrow{\lambda = \frac{c}{\nu_0}}$ $\Delta t = \frac{c/\nu_0}{c - \underline{v} \cdot \hat{r}}$

• En el caso clásico Δt es el mismo para fuente y obs. Como $\Delta t = \frac{1}{\nu_{obs}}$ $\rightarrow$ $\nu_{obs} = \nu_0 \left(1 - \frac{\underline{v} \cdot \hat{r}}{c}\right)$

Doppler clásico

• El Doppler clásico indica que si la fuente se aleja ($\underline{v} \cdot \hat{r} > 0$) entonces $\nu_{obs} < \nu_0$, es decir que la frecuencia medida se corre al rojo.

• Si la fuente se acerca ($\underline{v} \cdot \hat{r} < 0$) es $\nu_{obs} > \nu_0$ y el corrimiento es al azul.

• En el caso relativista ($v \sim c$) es $\frac{\Delta t}{\Delta t_{obs}} = \gamma(v)$ ya que Δt_{obs} es el tiempo propio entre ambos eventos.

Como $\Delta t_{obs} = \frac{1}{\nu_{obs}}$ $\rightarrow$

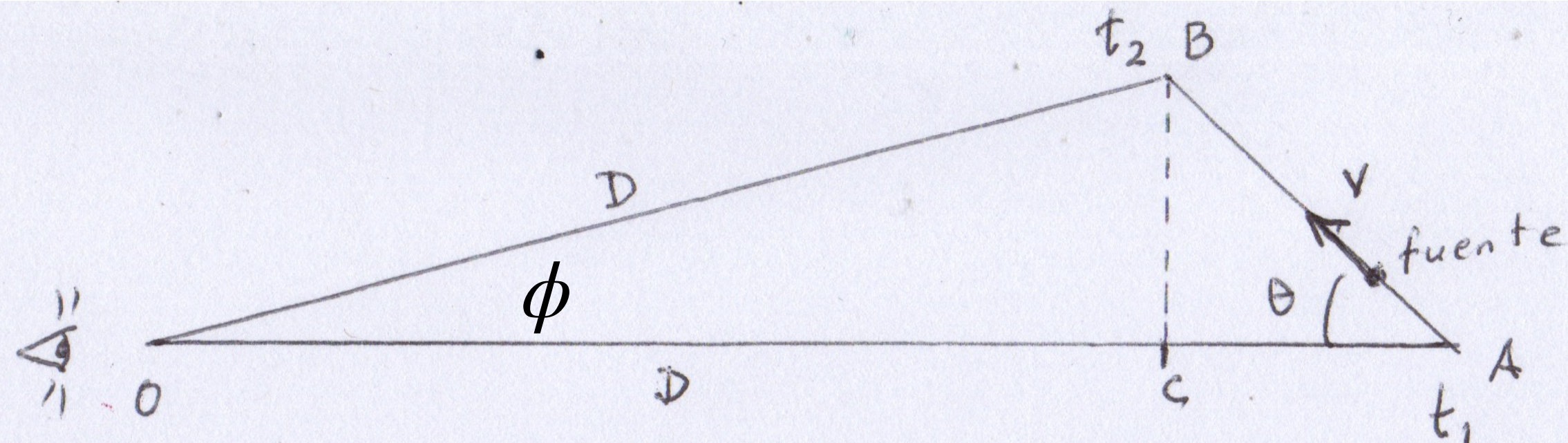
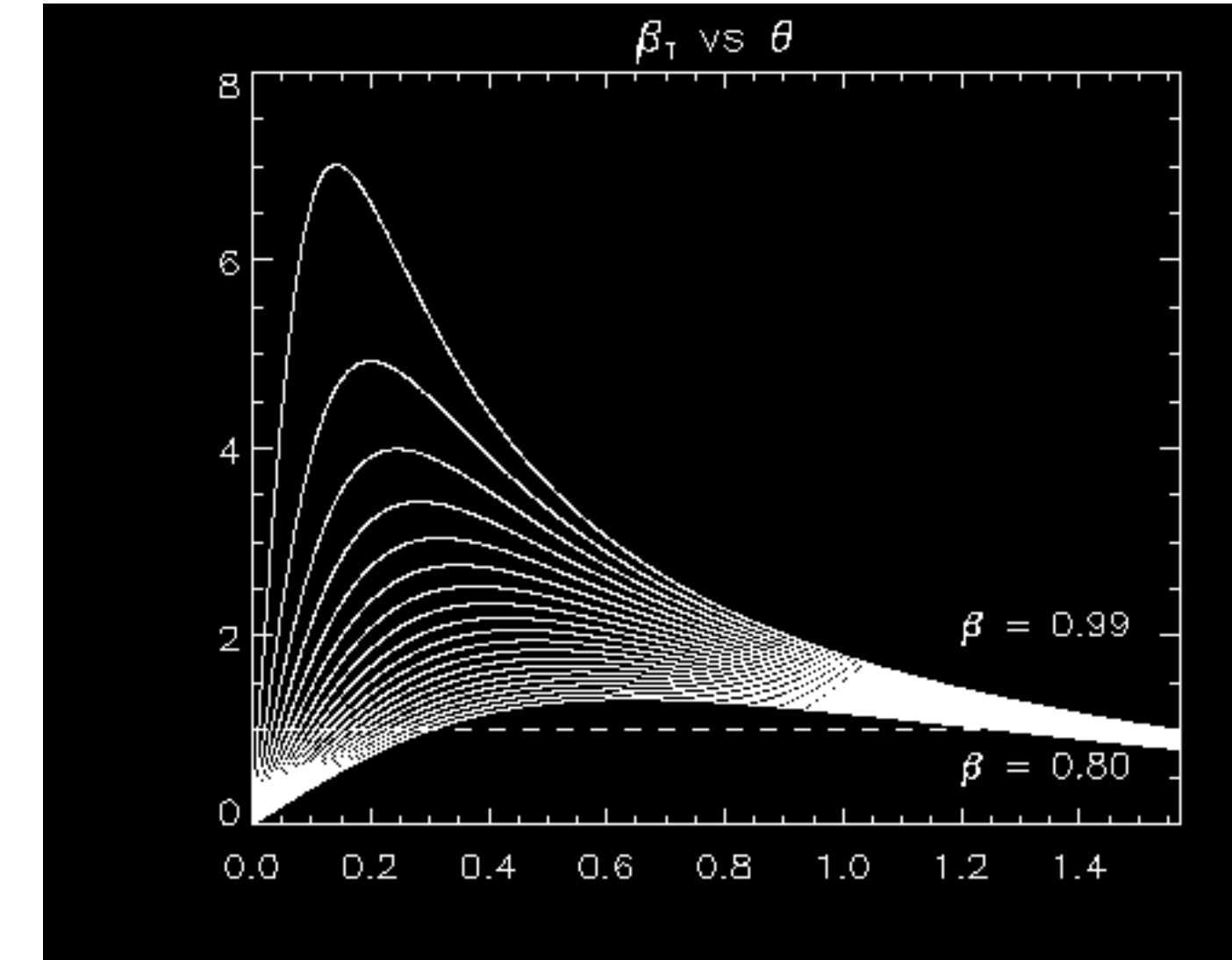
$$\nu_{obs} = \nu_0 \frac{\left(1 - \frac{\underline{v} \cdot \hat{r}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Doppler relativista

• El efecto relativista es enfatizar el corrimiento en frecuencia ya que $\gamma > 1$.

Movimientos superlumínicos

- Se refiere al movimiento de objetos en el plano del cielo con un movimiento **aparente** superior a la velocidad de la luz.
- Debe tenerse en cuenta que las velocidades medidas en el plano del cielo corresponden a desplazamientos angulares multiplicados por la distancia a la fuente y divididos por el tiempo transcurrido.



- Un objeto que emite luz en todas direcciones, va de A a B pasando por A en t_1 y por B en t_2 .
- El observador O detecta el pulso emitido en A a $t'_1 = t_1 + \frac{D}{c} + \frac{v dt \cos \theta}{c}$ $dt = t_2 - t_1$
- El emitido desde B es detectado en $t'_2 = t_2 + \frac{D}{c}$

- Para el observador O, el tiempo entre ambos pulsos es $dt' = t'_2 - t'_1 = (1 - \beta \cos \theta) dt$ $\beta = \frac{v}{c} < 1$
- En definitiva, el observador infiere que un objeto a distancia D tuvo un desplazamiento angular ϕ en un tiempo dt' . Entonces su velocidad transversal es $v_T = \frac{\phi D}{dt'}$

$$v_T = \frac{\phi D}{dt'} = \frac{v dt \sin \theta}{dt'}$$

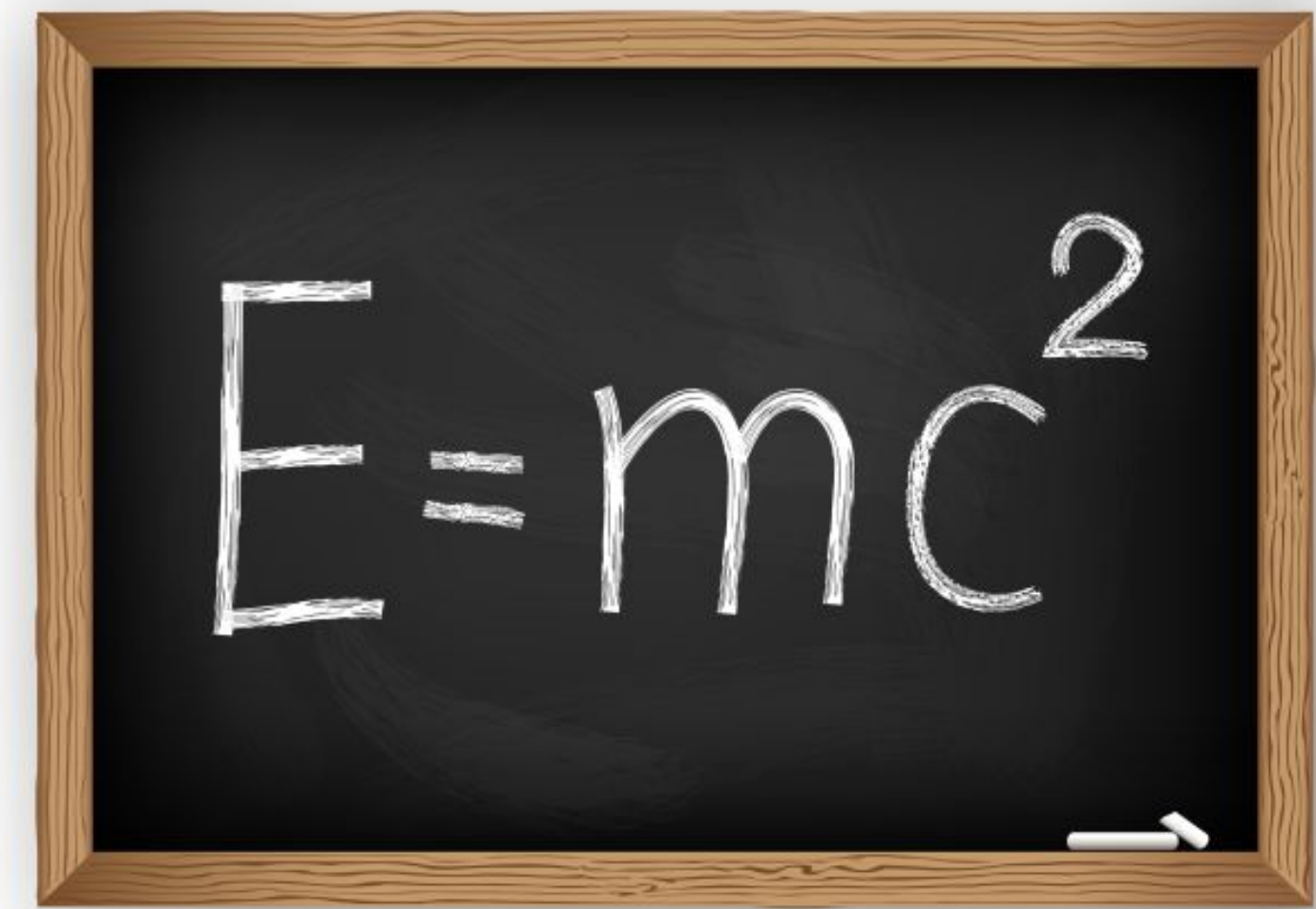
usando $\phi D \approx v dt \sin \theta$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\beta_T = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}$$

Si bien $\beta < 1$, para ciertos ángulos puede obtenerse $\beta_T > 1$.
Verifiquen que $\beta_T(\theta)$ tiene un máximo en $\theta_* = \arccos(\beta)$.
 y que $\beta_{T, \max} = \gamma \beta$ que puede ser mayor que 1.

Dinámica relativista



$$E=mc^2$$

- Para extender la dinámica en el límite relativista, empezamos por redefinir el impulso lineal.
- El impulso de una partícula es $\underline{p} = m \gamma(u) \underline{u}$, puesto que es la cantidad que se conserva en colisiones de sistemas aislados.
- Conservamos la siguiente versión de ecuación de movimiento $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$
- La variación de energía cinética para una partícula que parte del reposo resulta

$$\Delta T = \int \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int \frac{d\underline{p}}{dt} \cdot \underline{u} dt = \int d\underline{p} \cdot \underline{u}$$

Integro por partes:

$$\Delta T = \underline{p} \cdot \underline{u} \Big|_i^f - \int \underline{p} \cdot d\underline{u}$$

$$\underline{p} = \gamma m \underline{u} \rightarrow \Delta T = \Delta(\gamma(u) m u^2) - \int_0^{u^2} \frac{m}{2} \gamma(u) du^2$$

$$\int_0^{u^2} du^2 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -2c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Big|_0^{u^2}$$

De manera que:

$$\Delta T = \Delta(\gamma(u) m c^2)$$

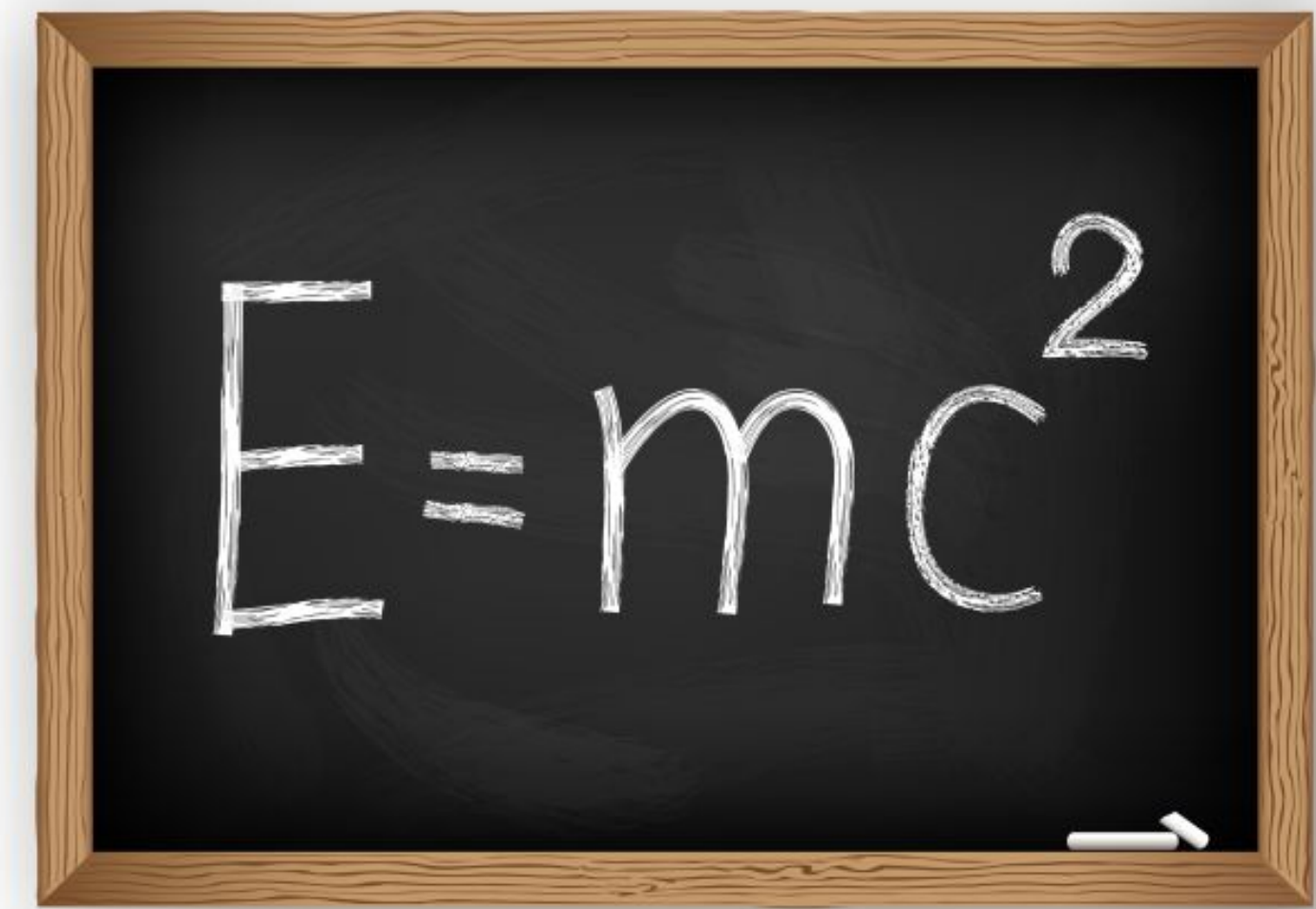
Definimos la energía de la partícula como

$$E = \gamma(u) m c^2$$

de manera que $\Delta T = E(u) - E(0)$

- Mirando las expresiones de $\underline{p}$ y E podemos generar la noción de masa $m(u) = m \cdot \gamma(u)$ donde m pasa a ser la masa en reposo.
- Entonces $E(u) = m(u) c^2$ expresa una equivalencia entre la masa relativista y la energía.

Dinámica relativista



- Aparece también la noción de **masa en reposo** de una partícula. Una partícula que no se mueve, tiene una energía $E = m c^2$.

- Para velocidades bajas respecto de c , podemos desarrollar en Taylor al orden mas bajo y

obtener
$$E = m \cdot c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx m \cdot c^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)$$

con lo cual tenemos que E es la energía en reposo mas la versión clásica de energía cinética.

- Una relación que nos va a resultar útil es expresar la energía E en función del impulso y no de la velocidad :

$$E = \gamma m c^2 \rightarrow E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$E^2 - E_0^2 = m^2 c^4 \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - 1 \right) \quad \beta = \frac{u}{c}$$

$$\therefore E^2 - E_0^2 = \gamma^2 \beta^2 m^2 c^4$$

$$p = \gamma m u \rightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 \beta^2 c^2$$

$$\therefore E^2 - E_0^2 = c^2 p^2$$

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

• Esto muestra que objetos sin masa en reposo como los fotones, también tienen energía ($E_{\text{fot}} = c p$).