Guía 2: Fluidos Clásicos

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a beluand@gmail.com, gracias. Belén Andrada

Problema 4: Considere un planeta fluido de masa M en rotación a velocidad angular ω. Suponiendo que el fluido se encuentra en reposo en un sistema de coordenadas que rota con el planeta y que además es incompresible:

a) Muestre que las fuerzas de volumen sobre un elemento de fluido pueden describirse por medio de un potencial Φ y dé una expresión para el mismo.

b) Sabiendo que la superficie del fluido es una isobara, describa la forma que tendrá el planeta.

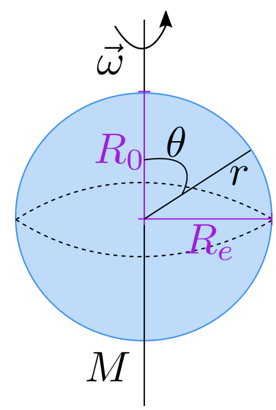
c) Encuentre el achatamiento (cociente entre diámetros polar y ecuatorial) del planeta en función de ω, M y constantes fundamentales.

d) Calcule el achatamiento de Saturno y compare con el valor observado.

Solución:

a) Empecemos por escribir las fuerzas que siente un elemento de fluido en el planeta: gravitatoria y centrípeta. En coordenadas esféricas, la velocidad angular puede escribirse como $\vec{\omega} = \omega(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$ con lo cual la fuerza centrípeta resulta (*verificar*):

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\rho\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \rho\omega^2 r(\sin^2\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\theta}). \tag{1}$$



Por otro lado, si consideramos que el elemento de fluido puede estar en cualquier parte del volumen del planeta y no necesariamente en la superficie, la fuerza gravitatoria que actúa sobre él será

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -\rho\, G\,\frac{M(r)}{r^2}\,\hat{r} = -\frac{4}{3}\pi\rho^2\, G\, r\,\hat{r}. \tag{2}$$

Notar que para obtener $M(r)$ estamos considerando al planeta como una esfera aunque después querramos estudiar su achatamiento. Básicamente estamos suponiendo que la deformación no es muy grande y entonces los cambios desde el punto de vista de la acción gravitatoria son despreciables.

Recordando la relación entre la fuerza y el potencial, es fácil ver que (*queda como ejercicio*)

$$\Phi_{\text{tot}} = -\rho\,\omega^2\frac{r^2}{2}\sin^2\theta + \frac{2}{3}\pi\rho^2\, G\, r^2. \tag{3}$$

Pero... ¿el potencial no está definido a menos de una constante?

b) A partir de ahora vamos a trabajar con elementos de fluido ubicados sobre la superficie del planeta. Para el caso de este problema, donde el fluido se encuentra en estado estacionario, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a

$$\nabla(p + \Phi) = 0 \implies p + \Phi = \text{cte}. \tag{4}$$

Como además tenemos el dato de que la superficie del fluido es una isobara, $p = \text{cte} \implies \Phi = \text{cte}$. [1]

[1] Se está usando cte simplemente para decir que algo es constante. Un cte no tiene por qué ser igual a otro.

Recordemos que estamos buscando la forma del planeta. Probablemente la forma más cómoda de describir esto es viendo cómo cambia r en función de θ. Para esto, vamos a usar que el potencial es constante y comparar su valor en dos lugares: por ejemplo, un polo (donde $R = R_0$ y $\theta = 0$) y otro punto genérico.

$$\Phi(r = R, \theta) = \Phi(r = R_0, \theta = 0) \tag{5}$$

$$-\rho\,\omega^2 \frac{R^2}{2}\,\sin^2\theta + \frac{2}{3}\pi\,\rho^2\,G\,R^2 = \frac{2}{3}\pi\,\rho^2\,G\,R_0^2 \tag{6}$$

Qué pasó con la constante del potencial?
Desde acá, ya podemos despejar $R(\theta)$:

$$R(\theta) = R_0\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \alpha = \frac{3\omega^2\sin^2\theta}{4\pi\,G\,\rho} \tag{7}$$

donde $\alpha > 0$ indica que $R(\theta) > R_0\ \forall\,\theta$. *¿Hay que pedirle algo más a α?*

c) Para calcular lo que se define como achatamiento, alcanza con evaluar R y θ en el ecuador: R_e y $\frac{\pi}{2}$ respectivamente.

$$\boxed{\frac{R_e}{R_0} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{3\omega^2}{4\pi\,G\,\rho}}}} \tag{8}$$

d) Para estudiar el caso de Saturno vamos a buscar sus datos de masa M, velocidad angular ω, R_0 y R_e.

$$M = 5{,}68\times 10^{26}\,\mathrm{kg} \tag{9}$$

$$\omega = 1{,}64\times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{10}$$

$$R_0 = 5{,}43\times 10^{7}\,\mathrm{m} \tag{11}$$

$$R_e = 6{,}02\times 10^{7}\,\mathrm{m} \tag{12}$$

Con M y R_0 puede calcularse la densidad de Saturno para incorporar en la ecuación (8) y calcular el achatamiento *teórico*. El achatamiento *observado* será simplemente el cociente entre R_e y R_0. *¿Cuánto vale α en este caso?*

$$\left.\frac{R_e}{R_0}\right|_{teo} = 1{,}062 \tag{13}$$

$$\left.\frac{R_e}{R_0}\right|_{obs} = 1{,}108 \tag{14}$$