Guía 3: Relatividad

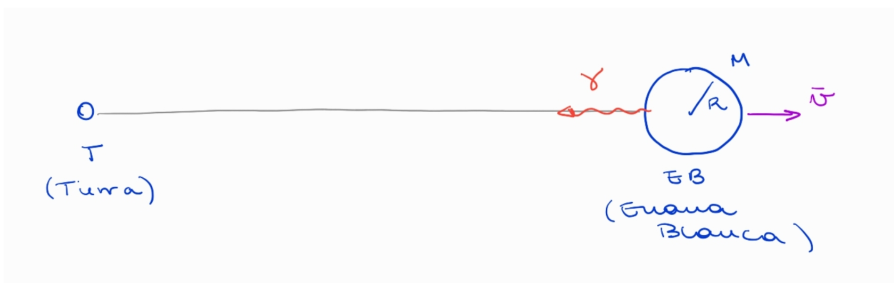
Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a beluand@gmail.com, gracias. Belén Andrada

Problema 4: Cuando un fotón se propaga en un campo gravitatorio débil, su energía E varía según

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{\Delta \Phi}{c^2} \tag{1}$$

donde ΔE es la variación de energía del fotón correspondiente a una diferencia de potencial gravitarorio $\Delta\Phi$ y c es la velocidad de la luz. Calcule el corrimiento al rojo gravitatorio medido por un observador en la Tierra para un fotón que es emitido desde la superficie de una enana blanca con $M = M_\odot$ y $R = 10^4$ km. ¿Qué velocidad debería tener la estrella respecto de la Tierra para que el corrimiento al rojo Doppler tuviera la misma magnitud que el corrimiento al rojo gravitarorio?

Solución:



Para empezar con el ejercicio olvidémonos momentáneamente de que la enana blanca (EB) puede estarse moviendo (ignoremos la velocidad $\vec{v}$) y pensemos en un fotón (γ) que es emitido desde la superficie de la EB dirigiéndose hacia la Tierra. A medida que ese fotón se aleja de la EB, va perdiendo energía según la ecuación (1). El término de la izquierda en esa ecuación es

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{\rm T} - E_{\rm EB}}{E_{\rm EB}} \tag{2}$$

donde $E_{\rm T}$ y $E_{\rm EB}$ son la energía del fotón en la Tierra y en la EB respectivamente. Por otro lado, el potencial gravitatorio en la superficie de la EB es $\Phi_{\rm EB} = -\frac{G\,M}{R}$, mientras que en la Tierra podemos asumir que $\Phi_{\rm T} \simeq 0$ (*¿por qué?*). Así,

$$\Delta\Phi = \Phi_{\rm T} - \Phi_{\rm EB} = \frac{G\,M}{R}. \tag{3}$$

Con lo cual, reemplazando (2) y (3) en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que $E = h\,\nu$, se llega a que

$$\nu_{\rm T} = \nu_{\rm EB}\left(1 - \frac{G\,M}{R\,c^2}\right). \tag{4}$$

Como $\frac{G\,M}{R\,c^2} > 0$ siempre (*¿cuánto vale?*), tenemos que $\nu_{\rm T} < \nu_{\rm EB}$ indicando un corrimiento al rojo. Y con esto estamos en condiciones de calcular el *redshift* gravitatorio para el cual partimos de la definición

$$z_g = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\rm T}} = \frac{\lambda_{\rm T} - \lambda_{\rm EB}}{\lambda_{\rm EB}} \tag{5}$$

y usamos la relación entre la frecuencia y la longitud de onda ($\lambda\,\nu = c$). A mí la cuenta me dio:

$$\boxed{z_g = \frac{\alpha}{1-\alpha} = 1{,}47 \times 10^{-4}, \qquad \alpha = \frac{G\,M}{R\,c^2}} \tag{6}$$

Para la segunda parte del problema, queremos calcular la velocidad a la que se debería mover la estrella para que el *redshift* gravitatorio y el Doppler sean equivalentes. Como ya vieron en la teórica, el cambio en frecuencias debido a este fenómeno se calcula como

$$\nu_{\mathrm{T}} = \nu_{\mathrm{EB}}(1 - \beta\cos\theta)\gamma \tag{7}$$

donde γ es el factor de Lorentz, $\beta = \frac{v}{c}$, y θ es el ángulo entre la visual y la velocidad, que en este caso lo tomamos como nulo (ver figura). Nuevamente tenemos que pasar la ecuación (7) a longitud de onda y calcular el corrimiento al rojo z_D, D por Doppler (*queda como ejercicio*). A mí me quedó:

$$z_D = \frac{1}{(1-\beta)\gamma} - 1. \tag{8}$$

Para calcular la velocidad (que está metida en β) nos falta pedir que los *redshifts* tengan la misma magnitud: $z_D = z_g$. De ahí puede despejarse en unos pocos pasos:

$$\boxed{v = c\left(1 - \frac{1}{z_g + 1}\right) = 44{,}2\,\mathrm{km/s}.} \tag{9}$$