Guía 4: Atmósferas estelares

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a beluand@gmail.com, gracias. Belén Andrada

<u>Problema 4:</u> Considere una atmósfera estacionaria, plana y estratificada en la que z es la dirección vertical.

a) Muestre que la ecuación de transporte puede escribirse como

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{1}$$

donde $\mu = \cos\theta$ y $d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho\, dz$. Interprete físicamente el significado de τ_ν.

b) Muestre que $\exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right)$ es un factor integrante de la ecuación, halle su solución formal y el valor de la intensidad emergente $I_\nu(z=\infty) = I_\nu(\tau_\nu = 0)$. Interprete el significado físico de esta última.

c) Suponiendo que $S_\nu = a\,\tau_\nu + b$ (a, $b > 0$) muestre que la intensidad emergente es $S_\nu(\tau_\nu = \mu) = a\,\mu + b$ (relación de Eddington-Barbier). Utilice este resultado para explicar el oscurecimiento del limbo solar.

<u>Solución:</u>

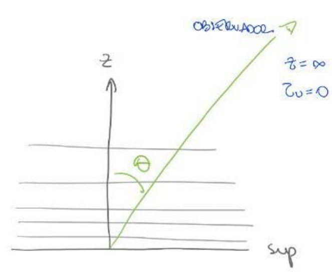
a) Partimos entonces de la ecuación de transporte radiativo

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla}) I_\nu = \rho(e_\nu + \sigma_\nu J_\nu - \kappa_\nu I_\nu - \sigma_\nu I_\nu), \tag{2}$$

donde e_ν es la emisividad del medio, σ_ν es el coeficiente de dispersión y κ_ν el de absorción. Considerando que la atmósfera es estacionaria (no hay dependencia temporal) y definiendo la opacidad $K_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$, podemos reescribir la ecuación de transporte como

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}) I_\nu = \rho\, K_\nu \left(\frac{e_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{K_\nu} - I_\nu\right) = \rho\, K_\nu\,(S_\nu - I_\nu), \tag{3}$$

y así hacer aparecer la función fuente S_ν. Nos falta considerar que la atmósfera es plana y estratificada, lo que nos dice que no habrá dependencia con las coordenadas x e y, de modo que la única contribución al lado izquierdo de la ecuación anterior vendrá de la proyección de $\vec{u}$ en la dirección z. De acuerdo a lo que vemos en la figura, $u_z = c\cos\theta$, y definiendo $\mu = \cos\theta$, nos queda



$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \frac{\rho\, K_\nu}{c}(S_\nu - I_\nu). \tag{4}$$

Para llegar a lo que nos pide el enunciado, nos falta hacer aparecer la profundidad óptica τ_ν, que se define a partir de $d\tau_\nu = -\frac{\rho\, K_\nu}{c} dz$. Hacemos el cambio de variables

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu}\frac{\partial \tau_\nu}{\partial z} = -\frac{\rho\, K_\nu}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} \tag{5}$$

y nos queda lo que pide el enunciado:

$$\boxed{\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu} \tag{6}$$

La interpretación física de la profundidad óptica queda para elaboración personal.

b) Para ver si $\exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right)$ es un factor integrante de la ecuación anterior, queremos ver que si multiplicamos a ambos lados por ese factor, podemos resolver la ecuación diferencial. Hagámoslo :) *(ustedes rellenen lo que falta)*

$$\begin{aligned} \mu\, e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} &= (I_\nu - S_\nu)\, e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} && (7) \\ \mu \frac{\partial}{\partial \tau_\nu}\left(I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}\right) &= -S_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} && (8) \\ \mu\, I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} &= \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}}\, d\tau'_\nu && (9) \end{aligned}$$

Así, mostramos que $\exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right)$ es un factor integrante de la ecuación (6) y encontramos su solución formal:

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu) = \frac{e^{\frac{\tau_\nu}{\mu}}}{\mu} \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}}\, d\tau'_\nu} \tag{10}$$

Por último, la intensidad emergente se obtiene simplemente evaluando la ecuación anterior en $\tau_\nu = 0$

$$I_\nu(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} S_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}}\, d\tau'_\nu. \tag{11}$$

La interpretación física de la intensidad emergente queda para elaboración personal.

c) Aquí nos dan como dato la función fuente $S_\nu = a\,\tau_\nu + b$, con a, b positivos, y nos piden que calculemos cómo queda la intensidad emergente en este caso. Reemplazando el dato en la expresión que obtuvimos para la intensidad emergente (11) resulta

$$I_\nu(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} (a\,\tau'_\nu + b) e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}}\, d\tau'_\nu = \frac{1}{\mu}(a\,\mu^2 + b\,\mu) = a\,\mu + b, \tag{12}$$

que es lo que se quería demostrar. Para explicar el oscurecimiento del limbo solar es preciso recordar que $\mu = \cos\theta$, con lo cual,

$$I_\nu(\tau_\nu = 0) = a\,\cos\theta + b. \tag{13}$$

Esta función tiene un máximo en $\theta = 0$ y mínimos en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, es decir que a medida que aumenta θ, menor es la intensidad que ve el observador.