Guía 6: Estructura y evolución estelar

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a beluand@gmail.com, gracias. Belén Andrada

Problema 2: Considere una estrella esférica de masa M y radio R

a) Escriba la ecuación de equilibrio hidrostático para la estrella usando como variable independiente m, la masa contenida en una esfera de radio r ($dm = 4\pi\,\rho\, r^2\, dr$, siendo ρ la densidad).

b) Usando la ecuación obtenida en el punto anterior y escribiendo la energía interna por unidad de masa del gas como $u = 3p/\rho n$, con n una constante, demuestre el *teorema del virial* $nE_i + E_g = 0$, donde E_i y E_g son la energía interna y gravitatoria totales de la estrella.

c) Muestre que una estrella compuesta por un gas ideal en equilibrio hidrostático se comporta como un sistema de calor específico negativo $c_g = dE/dT < 0$ donde c_g es el llamado calor específico gravotérmico.

d) Demuestre que si una estrella está formada por un gas ideal se contrae en forma cuasiestacionaria, se calienta, y lo contrario ocurre cuando se expande.

e) Explique a partir del resultado anterior cómo logra la estrella alcanzar la fusión del He luego de acabar su combustible de H (el mismo razonamiento se aplica a las etapas posteriores, como la fusión del C y el O después del He).

f) Cualitativamente, explique por qué las etapas de fusión que logre alcanzar la estrella dependen de su masa inicial.

Solución:

a) Como dice el enunciado, empecemos escribiendo la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{G\,m_r}{r^2} = 0. \tag{1}$$

Para que m_r (la llamo así para no confundir después con la masa de las partículas que conforman el gas) sea la variable independiente, hay que hacer un cambio de variables y escribir $r(m_r)$ y eso lo hacemos a partir de la relación que nos da el enunciado, resultando en

$$\frac{dp}{dm_r} + \frac{G\,m_r}{4\pi\,r^4} = 0, \quad \text{donde } r(m_r) = \left(\frac{3m_r}{4\pi\rho}\right)^2. \tag{2}$$

b) A partir de la ecuación (2) queremos deducir el teorema del virial como está propuesto en el enunciado, así que tendremos que hacer aparecer la energía gravitatoria y la energía interna. Para eso, hay que reescribr un poco esa ecuación e integrar respecto de m_r:

$$\int_0^M 4\pi\,r^3\,\frac{dp}{dm_r}\,dm_r = -\int_0^M \frac{G\,m_r}{r}\,dm_r. \tag{3}$$

Del lado derecho, hicimos aparecer directamente E_g. Al lado izquierdo hay que trabajarlo un poco más. Los pasos son: integrar por partes, considerar que la presión en el borde es igual a la presión externa (o sea nula) y escribir quién es dr/dm_r según la relación que nos da el enunciado en el item (a). Eso nos lleva hasta:

$$\int_0^M \frac{3p}{\rho}\, dm_r = n \int_0^M \frac{3p}{\rho n}\, dm_r = n \int_0^M u\, dm_r = n\, E_i. \tag{4}$$

donde multiplicamos y dividimos por una constante n y usamos la expresión para la energía interna por unidad de masa que nos dan como dato que, al integrarla en m_r nos da la energía interna total E_i. Juntando todo, la ecuación (3) se convirtió en lo que nos pedía el ejercicio:

$$n\, E_i + E_g = 0. \tag{5}$$

c) Como sabemos, para el teorema del virial clásico, $n = 2$, así que tomaremos ese valor de aquí en adelante (para gas monoatómico y $\gamma = \frac{5}{3}$). Empecemos por incluir la ecuación de estado de un gas ideal en la energía interna por unidad de masa (donde m es la masa de las partículas que conforman el gas) y calcular la energía interna total:

$$u = \frac{3}{2}\frac{k\,T}{m} \implies E_i = u\, M = \frac{3}{2}\frac{k\,T}{m}\, M. \tag{6}$$

Por otro lado, la energía total es $E = E_i + E_g$. Y, usando el teorema del virial, podemos escribirla como $E = -E_i$. Con estas dos cosas, podemos escribir el calor específico gravotérmico como:

$$c_g = \frac{dE}{dT} = -\frac{dE_i}{dT} = -\frac{3}{2}\frac{k}{m} M < 0. \tag{7}$$

d) Si el radio R disminuye, aumenta el pozo de potencial gravitatorio de manera que E_g (que es negativa) disminuye, así que $dE_g < 0$. Por el teorema del virial, $dE_i \sim -dE_g$, entonces $dE_i > 0$. Viendo arriba cómo se relacionan dE_i y dT, tenemos que $dT > 0$. Por lo tanto, cuando la estrella se contrae (muy lentamente, cuasiestacionario) aumenta la energía interna y, por lo tanto, aumenta también la temperatura.

El resto de los items quedan para elaboración personal.