2) Rehago el ejercicio 2 de la práctica 6 (excepto el punto a), considerando ahora que el medio interestelar se encuentra inmerso en un campo magnético de magnitud B. Esto implica agregar al miembro derecho de la ecuación 1 un término adicional debido a la fuerza magnética. Considere que las líneas de campo están congeladas en el material, por lo que el flujo magnético $\varphi \propto BR^2$ se conserva. ¿Cuál es el efecto del campo magnético sobre la inestabilidad de Jeans?

$$0 = -\bar{\nabla} p - \rho \bar{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \bar{J} \times \bar{B}$$

$\bar{J}$ : densidad de corriente

usando la ley de Ampère : $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{J}$

estacionario o cuasiestacionario

$$\Rightarrow \bar{J} = \frac{c}{4\pi} \bar{\nabla} \times \bar{B}$$

$$0 = -\bar{\nabla} p - \rho \bar{\nabla} \phi + \frac{1}{4\pi} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \times \bar{B}$$

Si miramos el último término en componentes

$$[(\bar{\nabla} \times \bar{B}) \times \bar{B}]_i = \varepsilon_{ijk} (\nabla \times B)_j B_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} (\partial_l B_m) B_k =$$

$$= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) (\partial_l B_m) B_k = B_k (\partial_k B_i) - B_k (\partial_i B_k) =$$

$$= \left[ \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (B^2) \right]_i$$

$$\Rightarrow 0 = -\bar{\nabla} p - \rho \bar{\nabla} \phi + \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}_{\text{término de presión magnética}} - \underbrace{\frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} (B^2)}_{\text{Tensión magnética}}$$

de esto sabíamos que:

$$\int \vec{\nabla}p\,\vec{r}\,d^3r = \int \vec{\nabla}(p\vec{r})\,d^3r - \int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,d^3r = 4\pi R^3 p_0 - 2MC_vT$$

$$\int \rho\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{r}\,d^3r = \theta\frac{GM^2}{R} \qquad \theta = \frac{4\pi R}{M^2}\int_0^R M(r)\rho r\,dr$$

esto salía del truco de integrar en $\vec{r}\,d^3r$; ahora hay que hacer lo mismo con la parte magnética

$$\frac{1}{4\pi}\int (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}\cdot\vec{r}\,d^3r = (*)$$

$$(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}\cdot\vec{r} = [(B_i\partial_i)B_j]\,r_j = [\partial_i(B_iB_j) - B_j\underbrace{\partial_iB_i}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0}]\,r_j = \partial_i(B_iB_j)\,r_j =$$

$$= \partial_i(B_iB_jr_j) - B_iB_j\,\partial_i r_j = \partial_i(B_iB_jr_j) - B_iB_j$$

$$(*) = \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}[\vec{B}(\vec{B}\cdot\vec{r})]\,d^3r - \frac{1}{4\pi}\int B^2 d^3r = \boxed{\frac{1}{4\pi}\oiint \vec{B}\cdot\vec{B}\cdot\vec{r}\cdot d\vec{s} - \frac{1}{4\pi}\int B^2 d^3r} \quad (I)$$

El otro término:

$$-\int \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)\cdot\vec{r}\,d^3r = -\int\left[\vec{\nabla}\left(\frac{B^2\vec{r}}{8\pi}\right) - \frac{B^2}{8\pi}\overbrace{\mathbb{1}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}^{3}\right]d^3r =$$

$$\boxed{= -\oiint \frac{B^2}{8\pi}\vec{r}\cdot d\vec{s} + 3\int\frac{B^2}{8\pi}\mathbb{1}\,d^3r} \quad (II)$$

Los junto: (I) + (II):

$$\oiint\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{B}}{4\pi} - \frac{B^2\mathbb{1}}{8\pi}\right)\vec{r}\cdot d\vec{s} - \int\left(\frac{B^2}{4\pi} - \frac{3B^2}{8\pi}\right)d^3r =$$

centro de co
La co

$$= \frac{1}{4\pi}\oiint \left[\vec{B}\cdot\vec{B} - \frac{B^2}{2}\mathbb{1}\right]\vec{r}\cdot d\vec{s} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int \frac{B^2}{2}\, d^3r}_{\text{es la energía magnética en un volumen } V}$$

el tensor de Maxwell

$$\overleftrightarrow{M} = \vec{B}\cdot\vec{B} - \frac{B^2}{2}\mathbb{1}$$

se puede tomar en un volumen tal que $\overleftrightarrow{M}\Big|_S \to 0$

$$t_B = \frac{1}{4\pi}\int \frac{B^2}{2}\, d^3r = \int_V \frac{B^2}{8\pi}\, dV$$

$$\phi = \int B\, ds = BA$$

a mi me da para ver B uniforme $E_B = \frac{B^2R^3}{6}$ pero a Battaner le da $E_B = \frac{B^2R^3}{24}$

Bueno, rehaciendo cuentas, le mando un $\xi$ para sacar

$$4\pi R^3 \rho_0 - 2\pi C_v T + \frac{\theta G M^2}{R} - \frac{B^2R^3}{\xi} = 0$$

$$\rho_0 = \frac{C_v M T}{2\pi R^3} - \frac{\theta G M^2}{R} + \frac{B^2R^3}{\xi} = \frac{C_v M T}{2\pi R^3} - \frac{1}{R}\left(\frac{\theta G M^2}{} - \frac{B^2R^4}{\xi}\right)$$

de movida el efecto es estabilizante porque le compite a la fuerza gravitatoria

Sabemos $\rho_{max}$ :

centro de copiado
La copia

deberia quedar