Guía 2: Fluídos clásicos

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 2: Un gas en equilibrio termodinámico local (LTE) es aquel cuya distribución de momentos $\vec{p}$ es localmente la de MaxwellBoltzmann, con una temperatura T, una densidad numérica n y una velocidad media $\vec{u}$ que pueden depender de la posición $\vec{r}$. Para este sistema, es:

$$f(\vec{r},\vec{p}) = \frac{n(\vec{r})}{[2\pi mkT(\vec{r})]^{3/2}} \exp\left[\frac{(\vec{p}-m\vec{u}(\vec{r}))^2}{2mkT(\vec{r})}\right]$$

donde k es la constante de Boltzmann y m la masa de las partículas.
(a) Verifique que el campo de densidad numérica del fluido es efectivamente $n(\vec{r})$.
(b) Considerando el caso $\vec{u}=0$, halle para un dado $\vec{r}$ la distribución de $v=|\vec{v}|$, siendo $\vec{v}=\vec{p}/m$ la velocidad de las partículas. Encuentre también la distribución de la energía E de las partículas.
(c) Considerando nuevamente el caso $\vec{u}=0$, calcule $< v >$ (la velocidad media), $\sqrt{< v >^2}$ (la velocidad cuadrática media), $\bar{v}$ (el valor más probable de v) y $\sigma = \sqrt{< v^2 > - < v >^2}$ (la dispersión de velocidades).

Solución:
(a) Sale prácticamente por definición:

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{r},\vec{p}) d^3p = \frac{n(\vec{r})}{[2\pi mkT(\vec{r})]^{3/2}} \int \exp\left[\frac{(\vec{p}-m\vec{u}(\vec{r}))^2}{2mkT(\vec{r})}\right] d^3p = \frac{n(\vec{r})}{[2\pi mkT(\vec{r})]^{3/2}} ([2\pi mkT(\vec{r})]^{1/2})^3 = n(\vec{r})$$

(b) Se puede ver lo siguiente en forma inmediata:

$$f(\vec{r},\vec{p},t)d^3p d^3r = m^3 f(\vec{r},\vec{v},t) d^3v d^3r \Rightarrow f(\vec{r},\vec{v}) = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r}))^2}{2kT(r)}\right]$$

Dado que estamos evaluando para un único r tomamos $u(\vec{r}) = u_o\hat{k}$, entonces:

$$(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r}))^2 = v^2 + u_o^2 - 2u_o v\cos\theta$$

En el caso $\vec{u}=0$ queda:

$$f(\vec{r},\vec{v}) = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT(r)}\right]$$

La densidad de partículas entre v y $v+dv$ para un dado r queda:

$$n(\vec{r},\vec{v}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vec{r},\vec{v})\ d\Omega\ v^2 dv\ = v^2\ dv\ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vec{r},\vec{v})\ \text{sen}\ \theta\ d\theta\ d\phi = 4\pi v^2\ dv\ f(\vec{r},\vec{v})$$

En la última igualdad hay unos pasos no triviales.

Por otro lado esta distribución se escribe como:

$$n(\vec{r},v) = \int_v^{v+dv} f_v(\vec{r},v)\ dv$$

Con lo cual comparando integrandos...

$$f_v(\vec{r},v) = 4\pi v^2 f(\vec{r},\vec{v}) = 4\pi n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT(r)}\right]$$

(c) Es hacer la cuenta usando las definiciones de velocidad media y velocidad cuadrática media.