Guía 2: Fluídos clásicos

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 5: *Inestabilidad convectiva.* Considere una atmósfera con partículas de masa m, calor específico a presión constante c_p , y un gradiente térmico $\partial T/\partial z = \alpha \quad (\alpha > 0)$, siendo z la coordenada vertical. Una columna de fluido asciende en dicha atmósfera en forma adiabática con velocidad v_0 , sin perturbar la estructura general de la misma.
(a) Muestre que la ecuación de balance de calor para la columna de fluido es

$$\frac{mc_p}{kT}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{H} = 0$$

donde k la constante de Boltzmann, g la aceleración de la gravedad y $H = kT/mg$ la altura de escala.
(b) Calcule la variación temporal de la temperatura de un elemento de fluido de la columna e interprete físicamente el resultado.
(c) Muestre que si $\alpha < g/c_p$, donde g es la aceleración local de la gravedad, el fluido de la columna está más frio que el fluido circundante, y lo contrario ocurre cuando $\alpha > g/c_p$. Explique por qué en este caso la atmósfera se vuelve inestable y se desarrolla el proceso de convección.

Solución:
La atmósfera está estratificada, para cada partícula tenemos que $\rho = mn$, en el caso estacionario la ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial (nv_0)}{\partial z} = 0$$

Aquí suponemos que $v_{0x} \sim v_{0y} \sim 0$ y que fuera de la columna existe equilibrio hidrostático:

$$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{g} \quad \Rightarrow dp = -\rho g dz$$

Además suponemos que el gas se comporta como ideal

$$p = nkT \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho g}{nkT}dz = \frac{gm}{kT}dz \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{1}{H}dz$$

Bueno en realidad $H \equiv H(z)$, en el caso de estar en LTE, el balance de calor queda:

$$\frac{3}{2}nk\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} T\right) + p\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = 0$$

$$\frac{3}{2}nkv_0\frac{\partial T}{\partial z} + +p\frac{\partial v_0}{\partial z} = 0$$

De la ecuación de continuidad sabemos que:

$$\frac{\partial (nv_0)}{\partial z} = n\frac{\partial v_0}{\partial z} + v_0\frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

se llega después de un par de pasos:

$$\frac{3}{2}nkv_0\frac{\partial T}{\partial z} - kTv_0\left[\frac{1}{kT}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{p}{kT^2}\frac{\partial T}{\partial z}\right] = 0$$

Se multiplica y divide por p convenientemente y se usa el hecho que $mc_P = \dfrac{5}{2}k$ para llegar a la ecuación de calor en una columna de fluido

$$\frac{mc_P}{kT}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{H} = 0$$

(b)
La variación temporal de la temperatura en un elemento de fluido es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_0 \frac{\partial T}{\partial z} = v_0 \left[-\frac{kT}{mc_P H} \right] = -v_0 \frac{g}{c_P}$$

si $v_0 > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial z} < 0$ esto es que si el aire se enfría medida asciende y viceversa.

(c) Ahora tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{v_0}\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha \text{ fuera de la columna de aire.}$$

$$\frac{1}{v_0}\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{c_P} \text{ dentro de la columna de aire.}$$

Quedan básicamente tres posibilidades:

i) $\alpha = \frac{g}{c_P}$ no pasa nada, está todo en equilibrio.

ii) $\alpha > \frac{g}{c_P}$ el aire se enfría a medida que asciende pero dentro de la columna de fluido se enfría menos, las burbujas que eventualmente se forman suben mas rápido y se genera una inestabilidad convectiva.

iii) $\alpha < \frac{g}{c_P}$ las burbujas tienden a bajar y el entorno se vuelve estable.