Guía 3: Relatividad

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

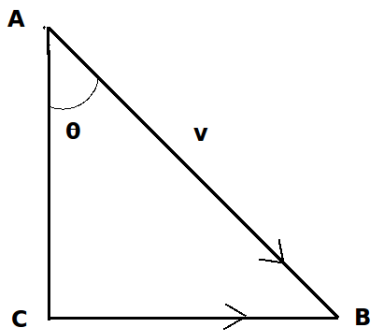
Problema 2: Una burbuja de materia es eyectada por un microquasar a una velocidad v cuya dirección forma un ángulo $\pi - \theta$ con la visual, en el sistema de referencia del observador.
(a) Muestre que β^{ap}, la relación entre la velocidad aparente de la burbuja en el cielo y la velocidad de la luz c es

$$\beta^{ap} = \frac{\beta \text{sen}\theta}{1 - \beta \cos\theta}$$

donde $\beta = v/c$.
(b) Grafique β^{ap} en función de θ para $\beta = 0.5, 0.7, 0.9, 0.99 y 0.999$. Muestre que es posible obtener $\beta^{ap} > 1$ y discuta su significado. ¿Qué condición debe cumplir β para que esto ocurra?
(c) Muestre que para un dado $\beta < 1, \beta^{ap}$ tiene un máximo en $\cos\theta_{max} = \beta$. Obtenga la dependencia de $\beta^{ap}(\theta_{max})$ con β e interprete a qué situación física corresponde.

Solución:

Esencialmente sale haciendo geometría:



El tiempo de viaje entre A y C es
$t_{AC} = \dfrac{AB\cos\theta}{c}$
La distancia aparente entre C y B es
$d_{ap} = CB = AB\text{sen}\theta$

La velocidad aparente es la distancia aparente dividido la diferencia de tiempo de la señal que viene del punto B viajando de A a B respecto del que viajó de A a C:

$$\frac{d_{ap}}{t_{ap}} = \frac{AB\text{sen}\theta}{\frac{AB}{v} - \frac{AB\cos\theta}{c}}$$

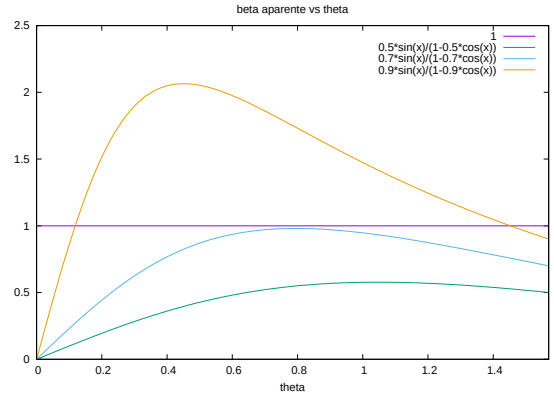
si se divide por AB y c

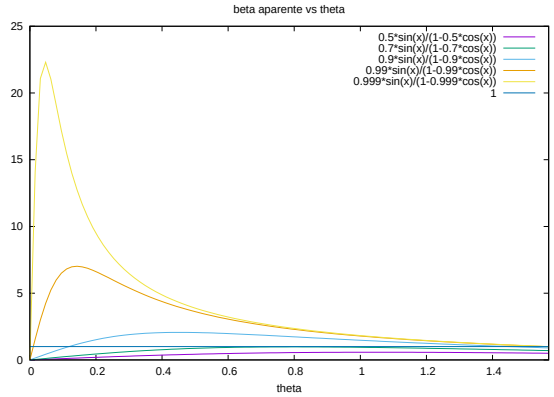
$$\beta_{ap} = \frac{\text{sen}\theta}{\frac{1}{\beta} - \cos\theta}$$

Reacomodando un poco:

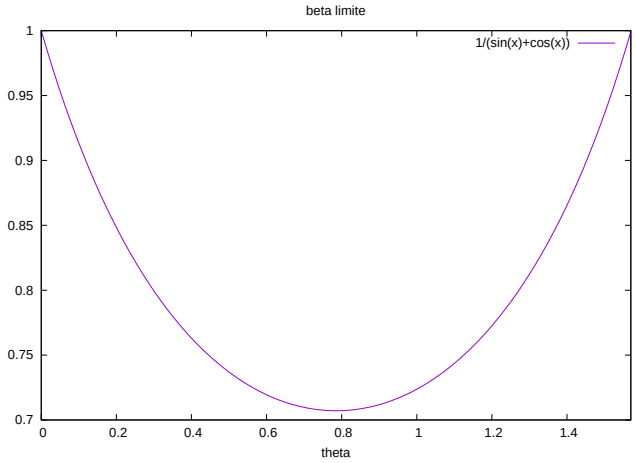
$$\boxed{\beta_{ap} = \frac{\beta \text{sen}\theta}{1 - \beta\cos\theta}}$$

(b) El gráfico pedido es:





Para tener valores hiperlumínicos de $\beta_{ap} > 1$, se tiene que cumplir que $\beta > (\text{sen}\theta + \cos\theta)^{-1}$



(c) Finalmente hay que derivar respecto de θ e igualar a cero: $\dfrac{\partial \beta_{ap}}{\partial \theta}|_{\beta} = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow \beta = \cos\theta_{max}$