**Guía 4: Atmósferas estelares**

*Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh*

__Problema 3:__ Considere un elemento de fluido compuesto por hidrógeno ionizado (llamado HII en astrofísica HI es el hidrógeno neutro) en la superficie de una estrella esférica de masa $M$, radio $R$ y luminosidad $L$, en la cual supondremos que los fotones solamente se propagan en forma radial.
**(a)** Muestre que la fuerza por unidad de volumen ejercida por la radiación sobre dicho elemento es

$$F_{rad} = \sigma \frac{L}{12\pi c R^2}\hat{r},$$

donde $c$ es la velocidad de la luz y $\sigma$ la sección eficaz por unidad de volumen para la interacción de la radiación con el fluido.
**(b)** ¿Cuál es la dependencia del cociente $F_{rad}/g$ con $R$, para $L$ constante? (g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la estrella).
**(c)** Suponiendo que $F_{rad}$ se debe solamente a la dispersión de la radiación por los electrones (scattering de Thomson), la cual tiene una sección eficaz por electrón $\sigma_T$, muestre que:

$$\frac{g}{F_{rad}} = \frac{12\pi G M m_p c}{\sigma_T L \rho_p}$$

donde $G$ es la constante de gravitación universal, $\rho_p$ la densidad en masa de protones y $m_p$ la masa de un protón.
**(d)** Calcule la máxima luminosidad que puede tener la estrella manteniendo un equilibrio hidrostático (llamada límite de Eddington), en función de $M$. Si para las estrellas de la secuencia principal del diagrama HR, $L \propto M^{3.5}$, calcule la masa límite que puede tener una estrella en equilibrio hidrostático.

__Solución:__
**(a)** La fuerza por radiación en un elemento de superficie $ds$ se puede expresar como:

$$dF_i = \tau_{ij} dS_j = -p\delta_{ij} dS_j = -p dS_i \tag{1}$$

donde $\tau_{ij}$ es el elemento $i-j$ del tensor de esfuerzos, que en el caso isotrópico es directamente la presión, entonces es lo que tenemos que calcular.

Partimos de la expresión de la presión de radiación a frecuencia $\nu$:

$$P_{\nu,ij} = \frac{1}{c}\oint I_\nu n_i n_j d\Omega \tag{2}$$

En el caso de un gas de fotones es la traza:

$$p_\nu = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(P_\nu) = \frac{1}{3c}\oint I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{3c} I_\nu \tag{3}$$

donde en el último paso se usó isotropía.

Por otro lado el flujo de radiación se vincula con la intensidad de radiación como:

$$q_\nu = 4\pi I_\nu \tag{4}$$

y el flujo con la luminosidad

$$L = 4\pi r^2 q_\nu \tag{5}$$

De esta manera, la presión en términos de la luminosidad queda:

$$p_\nu = \frac{L_\nu}{12\pi c r^2} \tag{6}$$

Integrando en todas las frecuencias, queda la misma expresión sin el subíndice $\nu$... volviendo a la primera expresión:

$$dF_{rad} = -\frac{L}{12\pi c r^2} dS \tag{7}$$

Claro, pero esto sería así si estuviera la presión de radiación sobre una esfera "homogenea y continua", pero en realidad está impactando sobre un fluido compuesto de hidrógeno, con lo cual este término está atenuado por la sección eficaz:

$$dF_{rad} = -\sigma_P \frac{L}{12\pi c r^2} dS \tag{8}$$

**(b)** Vamos ahora a comparar la fuerza de la presión de radiación con la gravedad de la estrella:

$$\frac{F_{rad}}{g} = \frac{\sigma_P \frac{L}{12\pi c r^2}}{\frac{GM}{r^2}} = \frac{\sigma_P L}{12\pi c GM} = cte \frac{L}{M} \tag{9}$$

De esta manera el equilibrio entre la presión de radiación y la interacción gravitatoria impone condiciones sobre la luminosidad y la masa de la estrella.

**(c)** Primero, si vemos por ejemplo de Wikipedia para recordar:
**Dispersión de Thomson:** La dispersión de Thomson es la dispersión elástica de la radiación electromagnética por una partícula cargada libre, tal y como se describe en el electromagnetismo clásico. Es justo el límite inferior (relativo a la energía) de la dispersión de Compton: la energía cinética de la partícula y la frecuencia del fotón no cambian en el proceso de dispersión. Este límite es válido mientras la energía del fotón sea mucho más pequeña que la energía de la masa de la partícula:

$$\nu << mc^2/h \tag{10}$$

O lo que es equivalente, mientras la longitud de onda de la luz sea mucho mayor que la longitud de onda de Compton de la partícula.

Dicho esto, la sección eficaz por electrón es:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \rightarrow \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \tag{11}$$

donde $r_e$ es el radio clásico del electrón.
La sección eficaz total por unidad de volumen es la sección eficaz por la densidad del número de electrones.

$$\sigma_{tot} = n_e \sigma_T = n_p \sigma_T = \frac{\rho_P}{m_p} \sigma_T \tag{12}$$

He usado la condición de cuasi-neutralidad: $n_e \approx n_p$

Lo que resta es reemplazar esto en la expresión para $g/F_{rad}$

**(d)** Para mantener el equilibrio hidrostático se tiene que cumplir:

$$F_{grav} = F_{rad} \tag{13}$$

reemplazando ambas expresiones, como la fuerza de radiación queda en términos de la luminosidad, se la puede despejar:

$$L = \frac{12\pi c m_P GM}{\sigma_T} \tag{14}$$

que constituye el límite de Eddington, luego sabiendo que una estrella de la secuencia principal es proporcional a $M^{3.5}$:

$$L = L_\odot \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{3.5} \tag{15}$$

Queda reemplazar y despejar $M$