Guía 5: Medio Interestelar

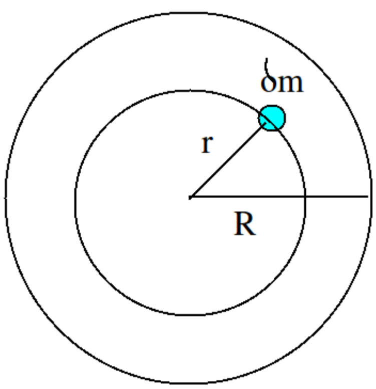
Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Considere una esfera de fluido de masa M y radio R, en equilibrio hidrostático a una temperatura T e inmersa en el medio interestelar (supuesto homogéneo).
(a) Muestre que la energía potencial gravitatoria de la esfera es $E_g = \Theta G M^2/R$, donde G es la constante de gravitación universal y Θ una constante. Suponiendo que la densidad del fluido que compone la esfera es homogénea, halle Θ.
(b) Muestre que si el fluido es un gas monoatómico, la presión P_0 en la superficie de la esfera es

$$P_0 = \frac{c_v M T}{2\pi R^3} - \frac{\Theta G M^2}{4\pi R^4}$$

donde c_v es el calor específico a volumen constante del material de la esfera.
(c) Grafique P_0 en función de R, y muestre que tiene un máximo. Calcule el radio R_J y la masa M_J de la esfera que corresponden a dicho máximo.
(d) Discuta la estabilidad de la esfera ante una compresión pequeña, en función de M. Muestre que para $M > M_J$ (llamada masa de Jeans), la esfera es inestable y colapsa sobre su centro.
(e) Discuta qué importancia tiene la masa de Jeans en el proceso de formación estelar.
(f) Calcule la masa de Jeans para una esfera de hidrógeno con una densidad media $\rho = 10^{24} gcm^3$ a $T = 100K$. Discuta el valor obtenido. ¿Corresponde éste a la masa de una estrella típica?

Solución:
(a)



este elemento de fluido δm tiene una contribución diferencial de energía potencial gravitatoria que se escribe como:
$\delta E_g = -\frac{GM(r)}{r}\delta m$
hemos supuesto simetría esférica.

reescribimos el diferencial de masa como: $\delta m = \delta\rho(r)dv = \delta\rho(r)d^3r = \delta\rho(r)4\pi r^2 dr$
Si integramos el diferencial de energía potencial gravitatoria queda:

$$E_g = -4\pi G \int_0^R M(r)\rho(r) r dr$$

Si bien no sabemos los detalles de como es $M(r)$ y $\rho(r)$, esta integral dará un valor constante que lo llamaremos Θ de la siguiente manera:

$$\Theta = \frac{4\pi R}{M^2}\int_0^R M(r)\rho(r) r dr$$

escrito de esta forma, tenemos una expresión sencilla relativamente general para la energía potencial gravitatoria:

$$E_g = -\Theta \frac{GM^2}{R}$$

en el caso que M y ρ constantes, $\Theta = \frac{3}{5}$.

(b) Suponemos ahora que hay equilibrio hidrostático a temperatura T:

$$\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla} \phi = 0$$

se lo puede integrar en volumen:

$$\boxed{\int (\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{r} d^3 r = 0}$$

Veamos el primer término del integrando:

$$\int \vec{\nabla} p \cdot \vec{r} d^3 r = \int \vec{\nabla}(p\vec{r}) d^3 r - \int p \vec{\nabla} \cdot \vec{r} d^3 r = \oiint p\vec{r} \cdot \hat{n} ds - 3 \int p d^3 r$$

En este último paso se usó el teorema de la divergencia e isotropía de la presión. En el primer término como es una integral de superficie es la presión en esa superficie, p_0. En el segundo término si dividimos y multiplicamos por el volumen encerrado, queda el valor medio de la densidad luego de aproximar por la ecuación de estado de un gas ideal:

$$4\pi R^3 p_0 - 3k_B T \tfrac{4}{3}\pi R^3 < n >= 4\pi R^3 p_0 - 3k_B T N = 4\pi R^3 p_0 - 2c_v m N T = 4\pi R^3 p_0 - 2c_v M T$$

en los últimos dos pasos hemos pensado en un gas monoatómico: $c_v = \frac{3}{2}\frac{k_B}{m}$

Ahora vamos por el segundo término:

$$\int \rho \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{r} d^3 r = \int \rho \frac{GM(r)}{r^2} (\hat{r} \cdot \vec{r}) d^3 r = ... = \Theta \frac{GM^2}{R}$$

Se juntan los dos resultados y queda:

$$4\pi R^3 p_0 - 2c_v M T + \Theta \frac{GM^2}{R} = 0$$

Falta despejar p_0 donde se ve que es un balance entre la parte térmica y la gravitatoria.

(c) Una vez obtenido p_0 se deriva respecto de R y se iguala a cero. Hecho esto se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{3}{2}\frac{MTc_v}{2\pi R^4} = \Theta \frac{GM^2}{\pi R^5}$$

Este radio es lo que se define como *radio de Jeans*

$$R_J = \frac{2}{3}\Theta \frac{GM}{c_v T}$$

Si se reemplaza en la expresión para la presión y después de tres pasos algebraicos queda:

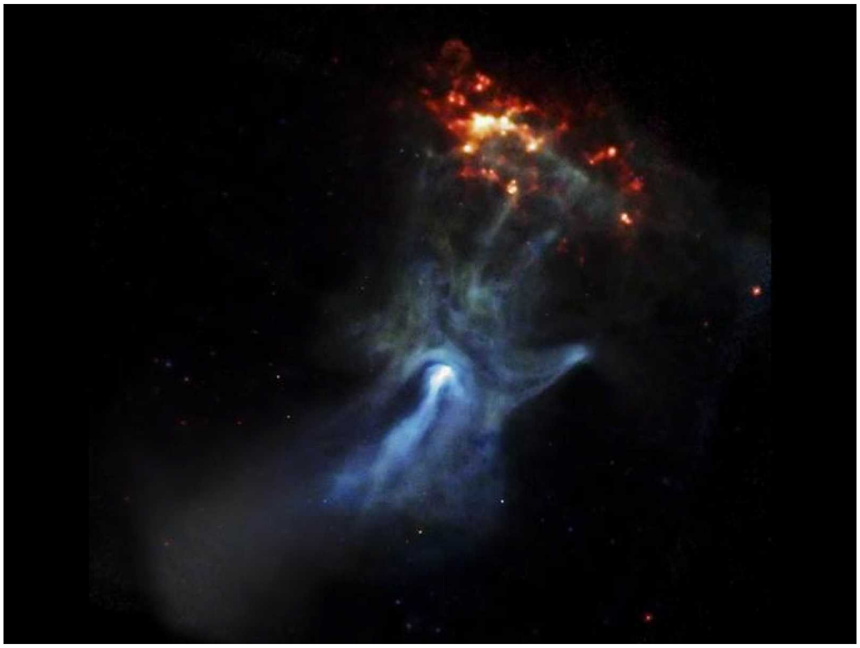
$$p_{max} = \frac{27}{64}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\Theta^3 G^3 M^2}\left(\frac{k_B T}{m}\right)^4$$

Para obtener *la masa de Jeans* escribimos la ecuación de estado para este caso: $p = \rho \frac{k_B T}{m}$, esto se reemplaza en p_{max} y se llega a:

$$M_J = \left[\frac{27}{64}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\rho \Theta^3 G^3}\left(\frac{k_B T}{m}\right)^3\right]^{1/2}$$

(d) El gráfico y su análisis lo dejo para elaboración personal.

(e) En regiones de formación estelar, valores típicos de densidad y temperatura son: $T \approx 10$K y $\rho \approx 10^{-24} g/cm^3$, reemplazando da una masa de Jeans: $M_J \sim 10^5 M_\odot$ este es un indicador que las estrellas no se forman aisladamente sino en regiones extendidas.



“La mano de Dios” un ejemplo bonito de región de formación estelar.
(f) elaboración personal.