Guía 6: Estructura y evolución estelar

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 3: Para una estrella de masa M y radio R cuyo material cumple una relación politrópica entre la presión p y la densidad ρ, $p = K\rho^{\gamma}$ con K constante, las ecuaciones de equilibrio mecánico pueden desacoplarse de las de transporte de energía, *obteniéndose la ecuación de Lane-Emden*,

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\Psi}{dx}\right) + \Psi^n = 0$$

donde $r = \alpha x$ es la coordenada radial, $\rho = \rho_0\Psi^n$ siendo ρ_0 la densidad central, y γ y n son constantes llamadas exponente e índice politrópico respectivamente, relacionadas por $\gamma = 1 + 1/n$.

(a) Deduzca la ecuación de Lane-Emden a partir de la de equilibrio hidrostático y la expresión de la masa $m(r)$ contenida en una esfera de radio r. Discuta cuáles son las condiciones de contorno apropiadas para esta ecuación.
Partimos del equilibrio hidrodinámico:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Gm}{r^2} \tag{1}$$

Se multiplica todo por r^2, hago $m(r) \to m$ y se usa el hecho que la densidad no depende de la posición:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) + G4\pi r^2\rho = 0 \tag{2}$$

Luego se usan las siguientes sustituciones: $r = \alpha x$, $\rho = \rho_0\Psi^n$ y $p = K\rho^{\gamma}$
Después de unos pocos pero pacientes pasos se llega a que:

$$\frac{n\gamma k\rho_0^{\gamma-2}}{4\pi G\alpha^2}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2\Psi^{n\gamma-1-n}\frac{d\Psi}{dx}\right] + \Psi^n = 0 \tag{3}$$

(b) Muestre que las constantes α, K y ρ_0 se relacionan por $4\pi G\alpha^2 = K(n+1)\rho_0^{\beta}$, con $\beta = -1 + 1/n$ y G la constante de gravitación universal. ¿Cuántos grados de libertad tiene un modelo politrópico con n fijo? Note que K puede ser un parámetro libre en algunos casos, o estar determinado por la ecuación de estado en otros.

Si las constantes se relacionan de la manera indicada la ecuación se escribe en forma mucho mas cómoda:

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\Psi}{dx}\right) + \Psi^n = 0 \tag{4}$$

Recordemos que para un gas ideal se tiene que $\gamma = C_p/C_v$, y según quien es n se tienen los distintos casos de la politrópica. $n = 0$ isobárica, $n = 1$ isotérmica, $n \to \infty$ isocórica.

Y su vinculación con los grados de libertad es:

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \tag{5}$$

en el caso monoatómico es $5/3$ y en el diatómico $7/5$. De igualar con la expresión que vincula a γ con el tipo de polítropa (n) la asociación es directa.

(c) Encuentre una solución analítica aproximada a la ecuación de Lane-Emden a través de un desarrollo de Taylor en potencias pares hasta orden seis, que verifiquen las condiciones de contorno apropiadas. Es decir, calcule los coeficientes b_2, b_4 y b_6 en $\Psi(x) = 1 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6$, en téerminos del índice politrópico n. Grafique los perfiles de densidad y presión obtenidos para $n = 0, 1.5, 3$ y 4.5. Considere admisible para x sólo el intervalo $[0, x_1]$, donde x_1 es la primera raíz de $\Psi(x)$.

La idea es simple, reemplazar el desarrollo $\Psi(x) = 1 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6$ en la ecuación de Lane-Emden y reemplazar para distintos valores de n.

Para el caso $n = 0$ queda:

$$6b_2 + 1 + 20b_4x^2 + 42b_6x^4 = 0 \tag{6}$$

Esta expresión incluye como condiciones de contorno: $\Psi(0) = 1$ y $\left.\frac{d\Psi(x)}{dx}\right|_0 = 0$

Para que la identidad se cumpla se debe cumplir que:

$b_2 = -1/6$, $b_4 = b_6 = 0$ y la solución es:

$$\Psi(x) = 1 - x^2/6 \tag{7}$$

En particular esta solución es exacta.

Para el caso $n = 1$:

$$\Psi(x) = 1 - x^2/6 - x^4/120 \tag{8}$$

Para este caso la solución exacta va como $\frac{\text{senx}}{x}$

Con $n = 2$ se tiene que $b_2 = -1/6$, $b_4 = 1/60$; y $b_6 = -11/7605$ (mejor verificarlo) y así se sigue...

La otra solución exacta es para $n = 5$ quedando:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}} \tag{9}$$

Pero esta última ecuación no tiene significado físico (elaboración personal)

(d) Para los modelos del punto anterior, considerando que el gas es ideal, grafique el perfil de temperatura y, considerando transporte radiativo, la tasa de producción de energía por fusión $\epsilon(r)$ y la luminosidad $l(r)$. Si se define el núcleo de la estrella como la zona central que genera el 90% de la energía, calcule para cada modelo qué fracción de la masa y del radio de la estrella ocupa el mismo.

El perfil de temperaturas sale a partir de considerar la presión escrita como

$$P = K\rho_0^{1+1/n}\Psi_n^{n+1} \tag{10}$$

de considerar gas ideal:

$$T = \frac{K\mu}{k_B}\rho_0^{1/n}\Psi_n \tag{11}$$

donde μ es el peso molecular y k_B es la constante de Boltzmann. A partir de estas relaciones se pueden graficar las curvas pedidas.

Dejo pendiente para que lo resuelvan el cálculo de $\epsilon(r)$ y $l(r)$.

(e) Muestre que la masa de una polítropa es

$$M = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left[\frac{(n+1)K}{G}\right]^{3/2}\left.\left(x^2\frac{d\Psi}{dx}\right)\right|_{x_1}\rho_0^{\frac{3-n}{2n}} \tag{12}$$

Se integra la masa dentro del radio de la estrella, que es la primera raíz de la solución de la ecuación de Lane-Emden: $R = \alpha x_1$

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi\alpha^3\rho_0 \int_0^{x_1} x^2\Psi^n dx = -4\pi\alpha^3\rho_0 \int_0^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 d\Psi}{dx}\right) dx = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left[\frac{(n+1)K}{G}\right]^{3/2}\left(x^2\frac{d\Psi}{dx}\right)\bigg|_{x_1} \rho_0^{\frac{3-n}{2n}} \tag{13}$$

donde hemos usado que $\alpha = \sqrt{\dfrac{K(n+1)\rho_0^\beta}{4\pi G}}$, con $\beta = -1 + 1/n$

Para lo que sigue es de utilidad considerar la expresión para la presión en los casos no-relativista y relativista.

$$p = K_{NR}\rho^\gamma = \frac{(2\pi)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{\rho}{m_H\mu}\right)^{5/3} \tag{14}$$

$$p = K_{Rel}\rho^\gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\hbar c\left(\frac{\rho}{m_H\mu}\right)^{4/3} \tag{15}$$

(f) Las enanas blancas están constituídas por un gas de Fermi no relativista. A partir de la ecuación de estado de este gas, muestre que estas estrellas pueden describirse por modelos politrópicos con $n = 1.5$ y K fijo. Resuelva numéricamente la ecuación de Lane-Emden para este caso, encuentre x_1 y $d\Psi/dx(x = x_1)$, y muestre que hay una relación entre el radio R y la masa M de una enana blanca. Discuta qué ocurre cuando $M \to \infty$.

Para resolver esta parte hay que partir de las ecuaciones de estado: $P = K_{NR}\rho^\gamma$ y $P = (\gamma - 1)u$, donde u es la energía interna por unidad de volumen. Entonces resta usar las expresiones del item anterior con los resultados numéricos para $n = 1.5$. En el caso no relativista $\gamma = 5/3$

(g) Cuando el radio de una enana blanca es muy pequeño, el gas de Fermi se vuelve relativista. Muestre que ahora la estrella puede describirse por una polítropa con $n = 3$, y que su masa está fija. Esto implica que existe un límite superior (llamado de *Chandrasekhar*) para la masa de una enana blanca. Encuentre el valor de este límite para una enana blanca compuesta por carbono y oxígeno.

Es análogo al anterior, pero en realidad en este límite si se quiere ser mas riguroso no es la ecuación de una polítropa la que se resuelve.