

Clase anterior

- Explosiones de Supernova.
- Supernovas tipo I (enanas blancas acretantes) y II (mas de 8 masas solares). Remanentes de supernova.
- Soluciones autosimilares. Teorema Pi de Buckingham.
- Etapa I: expansión libre $R \approx t$
- Etapa II: efecto de frenamiento del medio interestelar $R \approx t^{2/5}$
- Solución de Sedov-Taylor (ver corrección en penúltima página).

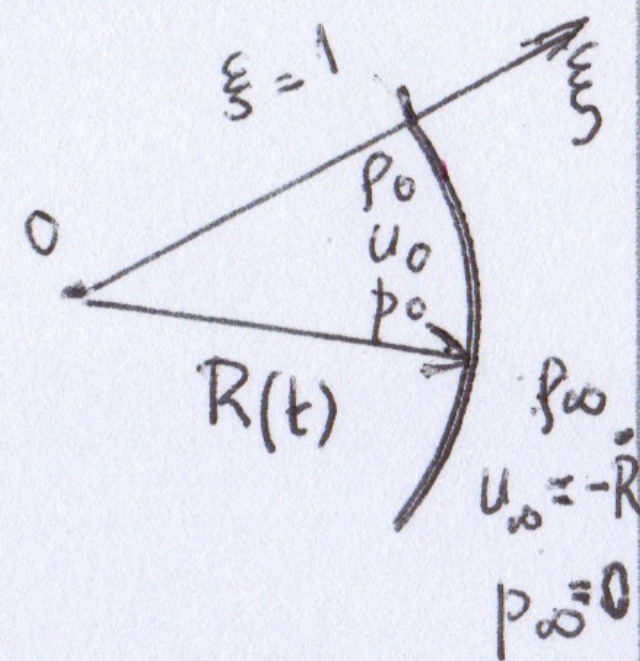
Modelo de Sedov-Taylor

- Por ahora solo tenemos la expresión para la evolución del frente de choque

$$R(t) = R_0 \left(\frac{E_* t^2}{\rho_\infty} \right)^{1/5}$$

- Queremos conocer $p(r,t)$, $u(r,t)$ y $\rho(r,t)$ en todo el fluido (ver Fluid Mechanics, Landau & Lifshitz, cap 10)

- Los valores ρ_0, u_0, p_0 justo dentro del choque, se obtienen por R-H



$$\rho_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_\infty = 4 \rho_\infty$$

$$u_0 = \frac{u_\infty}{4} = -\frac{\dot{R}}{4} \longrightarrow u_0 = -\frac{\dot{R}}{4} + \dot{R} = \frac{3}{4} \dot{R}$$

$$p_0 = \frac{3}{4} \rho_\infty u_\infty^2$$

transf. Galileo al ref. de la estrella

Estos son los valores en el contorno interno.

- Proponemos soluciones autosimilares en (r,t) dados por

$$p(r,t) = p_0 f(\xi)$$

$$\xi = \frac{r}{R(t)} \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$u(r,t) = \frac{3}{4} \frac{2r}{5t} u(\xi)$$

$$c^2(r,t) = \frac{5}{16} \frac{4r^2}{25t^2} c^2(\xi)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

(Noten que $\frac{2}{5} \frac{r}{t} = \dot{R}$ en $\xi = 1$)

- Reemplazamos estas expresiones en las ecuaciones de fluidos con simetría esférica

$$\partial_t p + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 p u) = 0$$

$$\partial_t u + u \partial_r u = -\frac{1}{\rho} \partial_r p$$

$$\left(\partial_t + u \partial_r \right) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (\text{adiabática})$$

sabiendo que

$$f(\xi=1) = 1$$

$$u(\xi=1) = 1$$

$$c^2(\xi=1) = 1$$

Mecanismos de pérdida de masa

- Vamos a ver distintos niveles de pérdida de masa en objetos astronómicos, debidos a diferentes factores.
- En atmósferas planetarias extendidas, se pierde masa por un mecanismo conocido como **escape de Jeans**.
- Las **estrellas tardías** pierden masa por **gradiente de presiones**, en un mecanismo conocido como **viento estelar**.
- En **estrellas tempranas**, los vientos estelares son intensos y se deben muy probablemente a **presión de radiación**.
- La próxima clase vamos a ver el fenómeno inverso, de ganancia de masa, conocido como **acreción**.

Atmósferas y exósferas planetarias

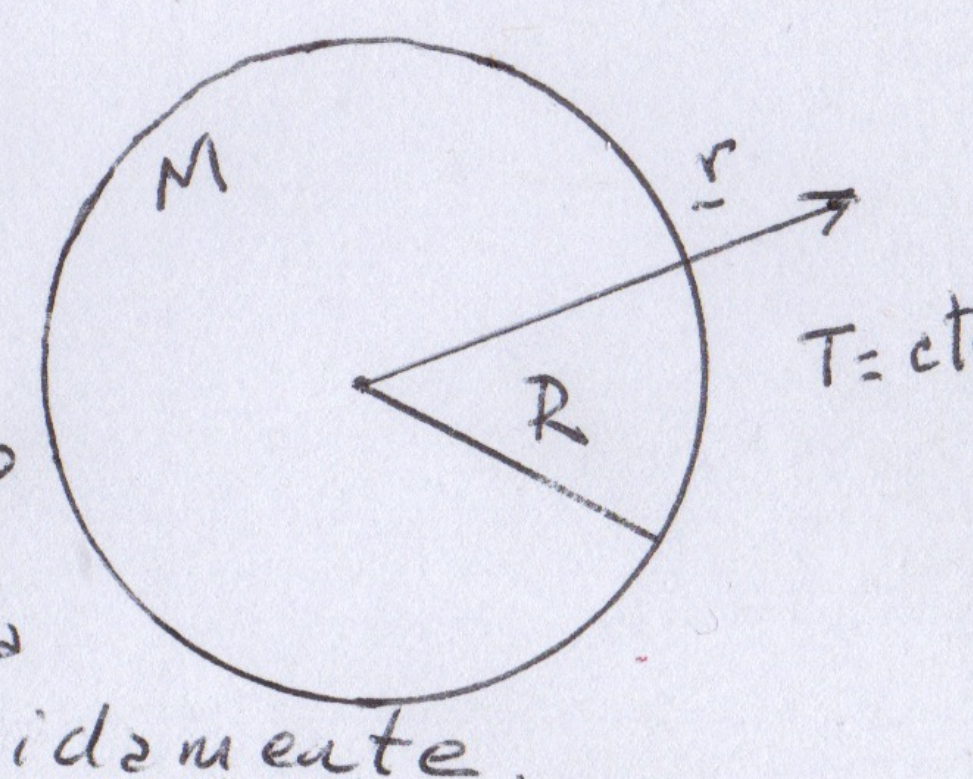
- Llamamos atmósfera planetaria al gas atrapado gravitatoriamente sobre la superficie de un planeta.
- Supongamos una atmósfera estática y (por simplicidad) isotérmica en un planeta de masa M y radio R .

$$0 = -\nabla p - \frac{GM}{r^2} \rho \hat{r}$$
$$\left. \begin{array}{l} p = nk_B T \text{ (gas ideal)} \\ T = \text{cte} \\ p = mn \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = -kT \frac{dn}{dr} - \frac{GMm}{r^2} n \\ \int_{n_0}^{n(r)} \frac{dn}{n} = -\frac{GMm}{kT} \int_R^r \frac{dr}{r^2} \end{array} \right\}$$

$$n(r) = n_0 \exp \left[-\frac{GMm}{kTR} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \right]$$

Noten que
$$n(r \rightarrow \infty) = n_0 \exp \left(-\frac{GMm}{kTR} \right) = n_\infty$$

Es decir que, según esta solución, la atmósfera se extiende indefinidamente.



Atmósfera o exósfera?

Distinguimos dos regímenes:

(i) Atmósfera

Cerca de la superficie, donde la densidad $n(r)$ es alta y el régimen es (posiblemente) colisional.

$$\left. \begin{array}{l} h = r - R \\ h \ll R \end{array} \right\} \rightarrow 1 - \frac{R}{r} \approx \frac{h}{R} \ll 1$$

$$n(r) \approx n_0 \exp \left[-\frac{GMm}{kTR^2} h \right]$$

que podemos interpretar como

$$n(r) = n_0 e^{-h/H}$$

$$H = \frac{kT}{mg}$$

(escala de alturas)

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

(gravedad superficial)

La densidad es alta como para que $\lambda = \frac{1}{n\sigma} \ll H$ y las colisiones mantengan una distrib. maxwelliana. A este fluido estático lo llamamos atmósfera.

(ii) Exósfera

A grandes distancias del planeta, la densidad es baja y se vuelve no colisional.

El comportamiento es cinético y el gas es descrito por su función de distribución. Las partículas cuya velocidad radial supere la velocidad de escape v_{esc} , podrán abandonar el planeta.

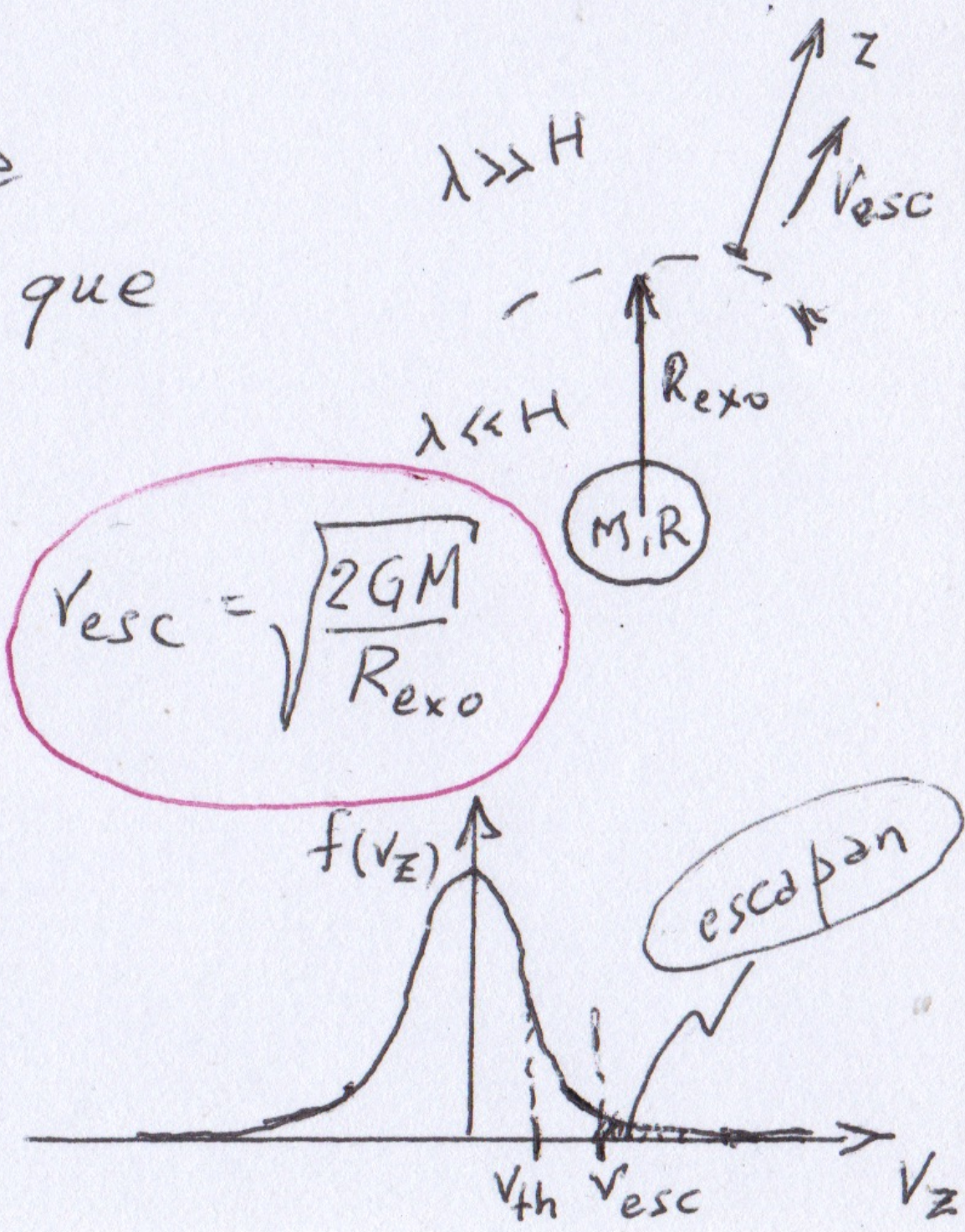
Sea R_{exo} la base de la exósfera. Las partículas que escapan satisfacen

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R_{exo}} \geq 0 \rightarrow$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_{exo}}}$$

Suponiendo distribución maxwelliana:

$$f(v_z) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}$$



Escape de Jeans

El flujo de partículas que escapan es:

$$F = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{v_{esc}}^{\infty} dv_z v_z e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} \quad ; \quad \frac{\# \text{ part}}{\text{area} \times \text{tiempo}}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{mv_z^2}{2kT} \\ dx &= \frac{m}{kT} v_z dv_z \end{aligned} \right\} \rightarrow F = n \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{GMm}{kTR_{exo}} \right]$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_{exo}}}$$

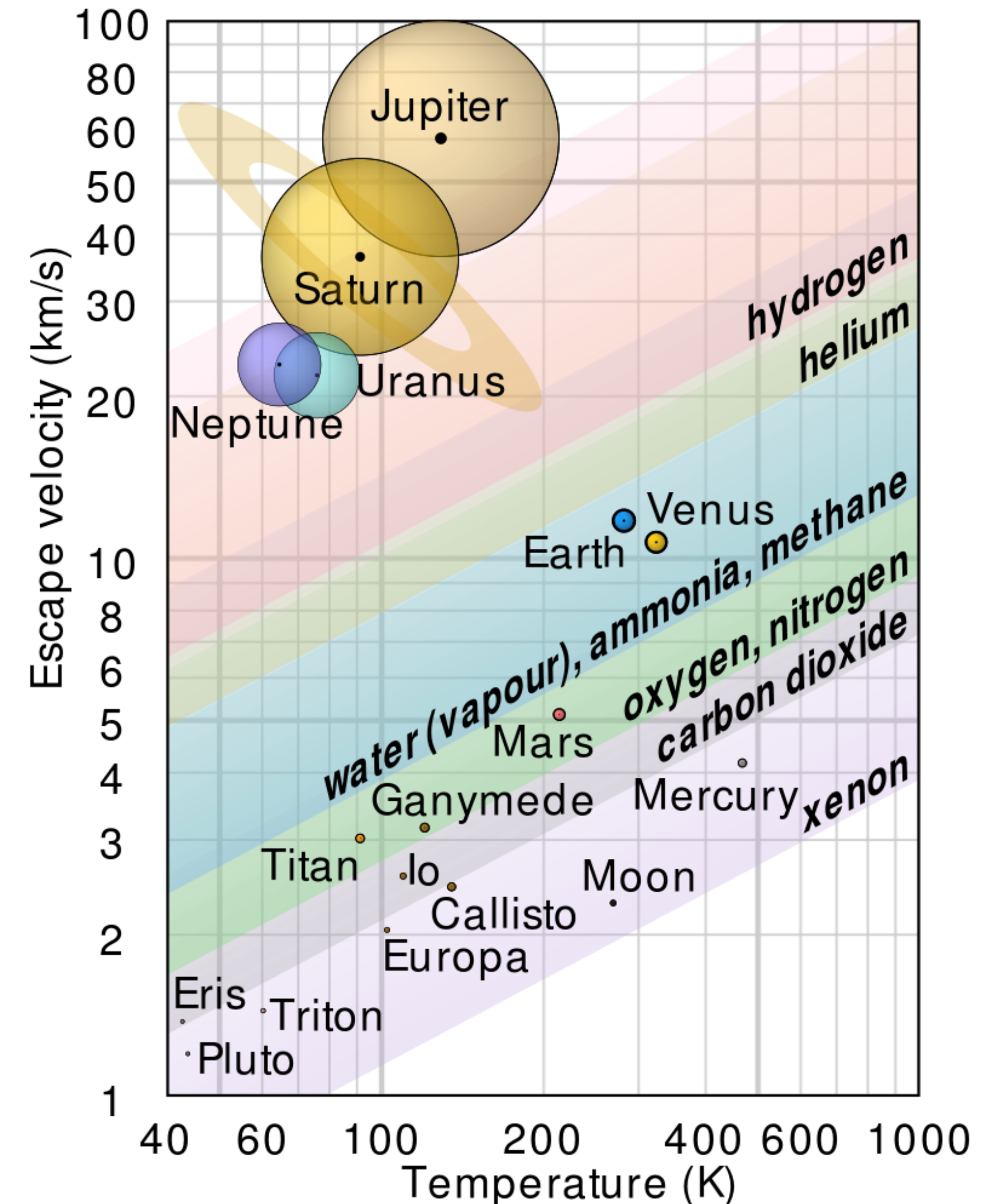
Ese flujo saliente y permanente de partículas, ocasiona una pérdida de masa

$$\dot{M} = 4\pi R_{exo}^2 \cdot m F \quad ; \quad \frac{\text{masa}}{\text{tiempo}}$$

$$\dot{M} = 4\pi R_{exo}^2 m n \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} e^{-\frac{GMm}{kTR_{exo}}}$$

escape de
Jeans

$$\text{Si } v_{esc} \gg v_{th} \rightarrow \frac{2GMm}{kTR_{exo}} \gg 1$$



- El escape de partículas es apreciable cuando $v_{th} \geq v_{esc}$.
- Es decir, $k_B T \geq 2GMm/R_{exo}$, lo cual ocurre preferencialmente para las especies mas livianas.

Efecto de gradiente térmico

- Para la atmósfera solar, se propuso originalmente un modelo hidrostático.
- Se consideró el papel de la conductividad térmica, debido al importante gradiente de temperatura.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{dp}{dr} - \frac{GM\rho}{r^2} \\ \rho &= \rho \frac{k_B T}{m} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\rho}{k_B T}$$

Pero ahora $T \neq \text{cte}$ y consideramos la conductividad térmica. Para un plasma

$$\underline{\underline{q}} = -K_0 T^{5/2} \underline{\underline{\nabla T}}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{q}} &= 0 \\ \text{esféricas} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(-K_0 T^{5/2} \frac{dT}{dr} \right) \right] = 0$$

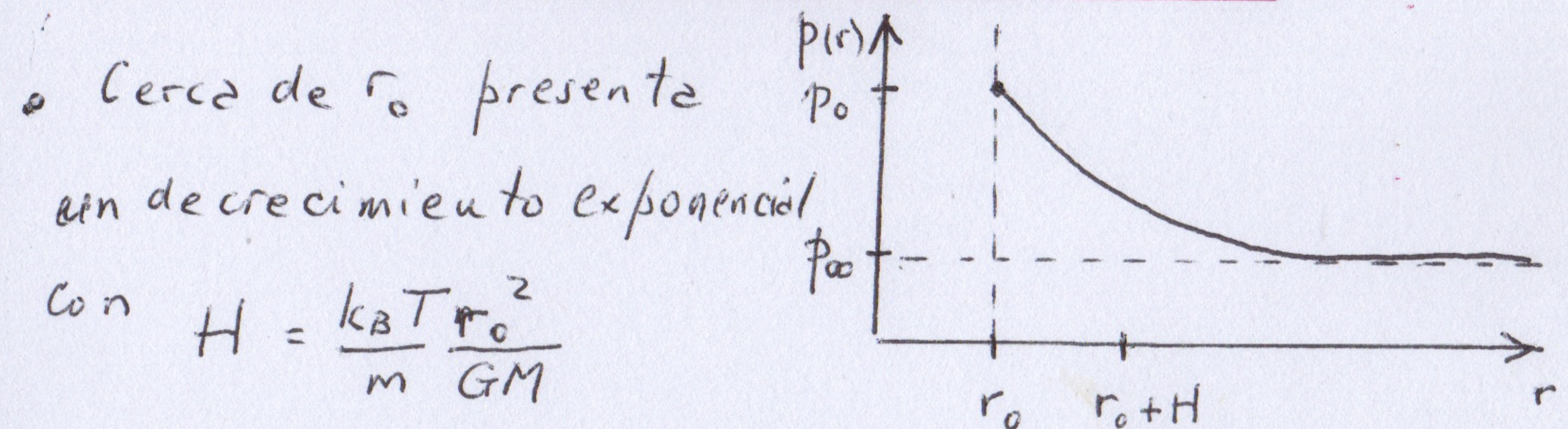
$$r^2 T^{5/2} \frac{dT}{dr} = \text{cte} \rightarrow T(r) = T_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2/7}$$

En un punto de la superficie r_0 se supone una temperatura T_0 y luego $T \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

Reemplazamos en la ecuación para p , es decir:

$$\int_{p_0}^{p(r)} \frac{dp}{p} = -\frac{GMm}{k_B T_0 r_0^{2/7}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^{12/7}}$$

$$p(r) = p_0 \exp \left[\frac{7}{5} \frac{GMm}{k_B T_0 r_0} \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{5/7} - 1 \right) \right]$$

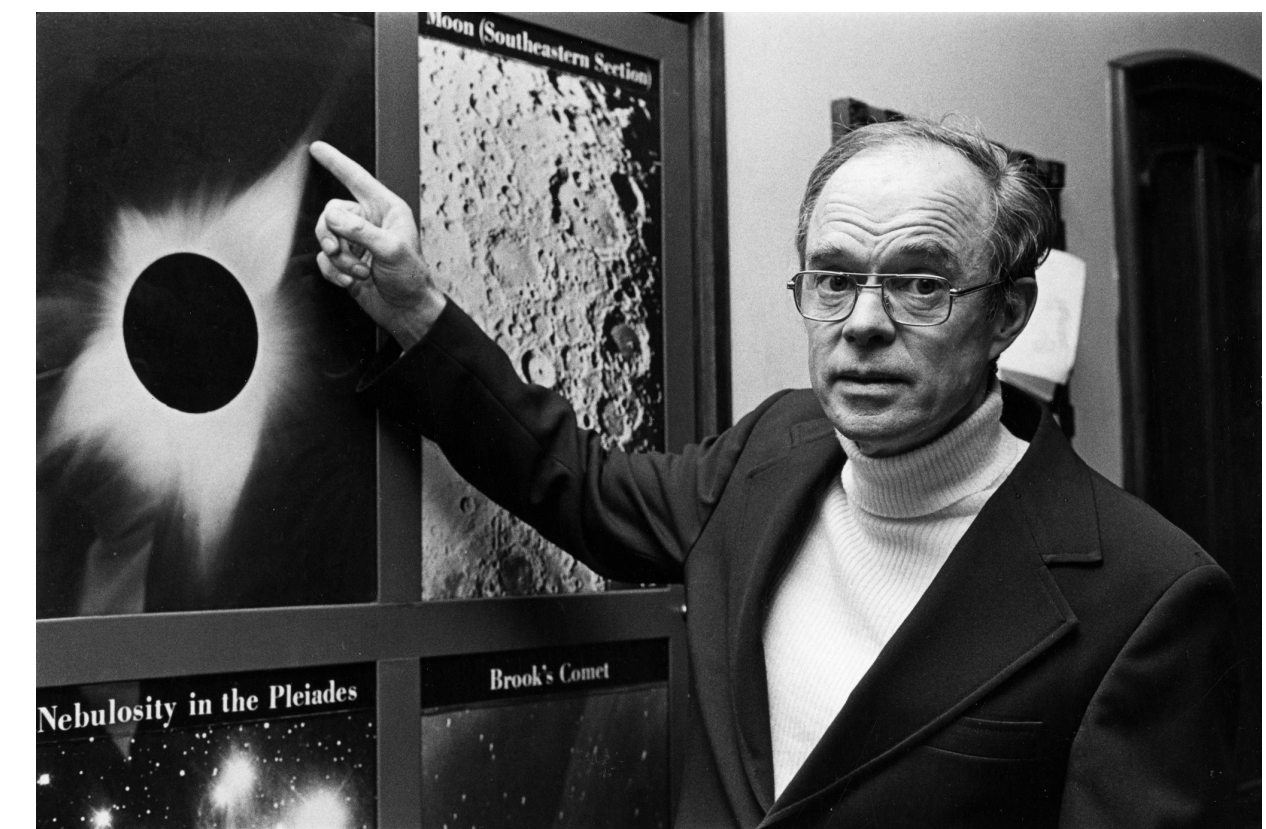


Pero $p \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p_{\infty}$ $p_{\infty} = p_0 \exp \left[-\frac{7}{5} \frac{GMm}{k_B T_0 r_0} \right] > 0$

Al no haber un medio capaz de ejercer la presión p_{∞} lejos del Sol, la atmósfera no resulta estática.

Viento solar (Parker 1958)

- En 1958, Eugene Parker sentó las bases del modelo de viento solar que usamos aún hoy.
- Volvió a suponer el caso isotérmico, pero ya no estático sino con una expansión radial en estado estacionario.



$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{GM}{r^2} \hat{r} \\ p &= p \frac{k_B T}{m} \quad T = \text{cte} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{M} &= 4\pi r^2 \rho u = \text{cte} \\ u \frac{du}{dr} &= -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{GM}{r^2} \\ c_s^2 &= \frac{k_B T}{m} = \text{cte} \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento puede integrarse:

$$\frac{u^2}{2} + c_s^2 \ln \rho - \frac{GM}{r} = E$$

Reemplazando la ec. continuidad

$$\rho = \frac{\dot{M}/4\pi}{u r^2} \rightarrow \frac{u^2}{2} + c_s^2 \ln u - 2c_s^2 \ln r - \frac{GM}{r} = \text{cte}$$

De esta expresión obtenemos diferentes soluciones $u(r)$ para distintos valores de la cte.

Para graficar curvas de nivel, conviene primero adimensionalizar:

$$\left. \begin{aligned} u &\rightarrow c_s u \\ r &\rightarrow r_s r \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{u^2}{2} - \ln u - 2 \ln r - \frac{2}{r} = \text{cte}$$

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2}$$

El r_s así definido es el llamado punto sónico.

Para ver esto, derivamos la ecuación

$$u u' - \frac{u'}{u} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2} = 0 \rightarrow u' = \frac{2u}{r^2} \frac{r-1}{u^2-1}$$

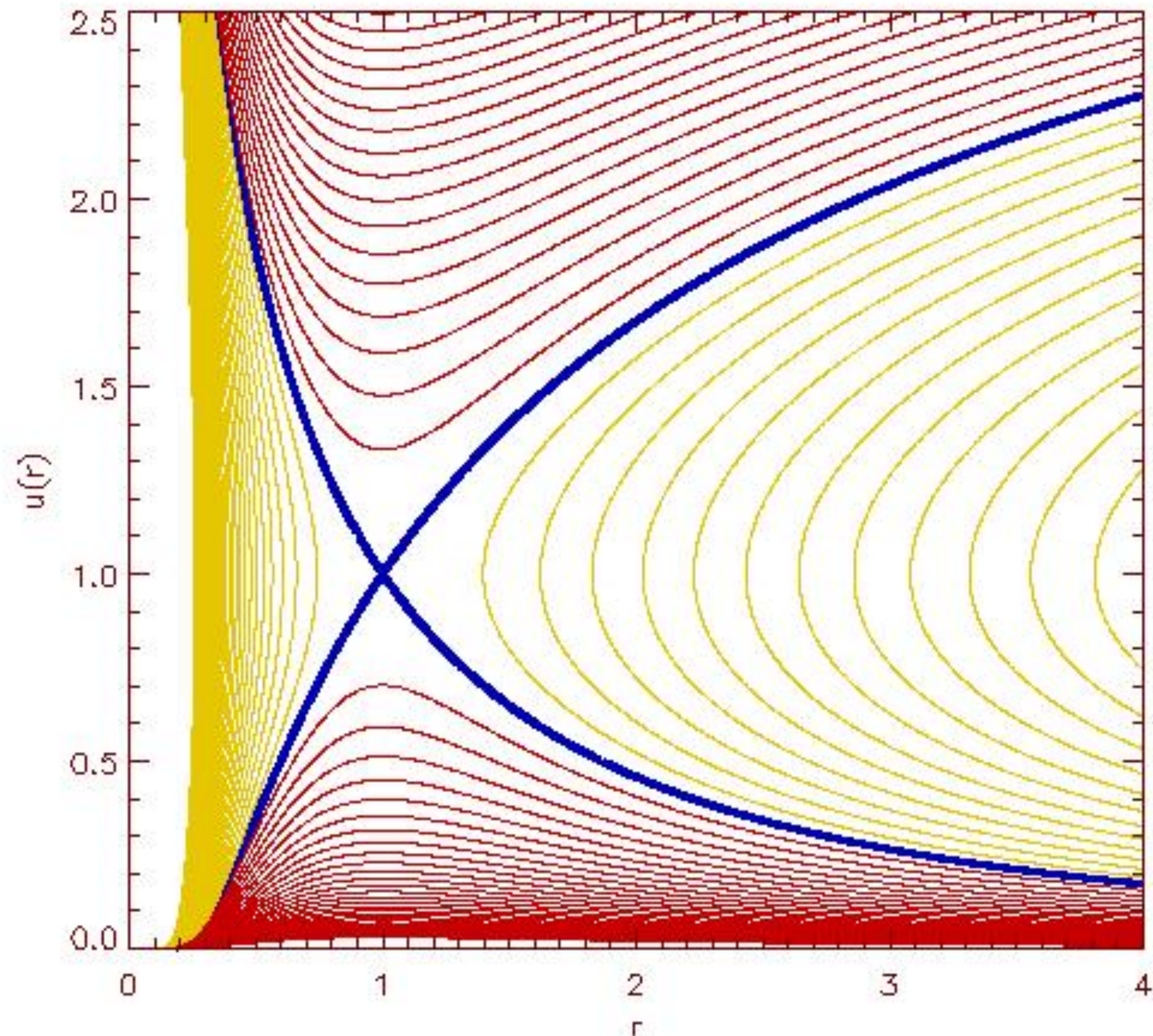
La singularidad en $u=1$ (vel. sonido adimensional) puede evitarse si eso ocurre en el punto sónico $r=1$.

Viento solar (Parker 1958)

- Aquí vemos las soluciones $u(r)$ para distintos valores de la constante. Se grafican como contornos de nivel de

$$\frac{u^2}{2} - \ln u - 2 \ln r - \frac{2}{r} = cte$$

- Las curvas **amarillas** las descartamos por ser multivaluadas.
- Las curvas **rojas** inferiores son soluciones tipo **brisa**, son totalmente subsónicas. Las descartamos también porque sabemos que el viento solar es supersónico al impactar sobre los planetas del sistema solar.
- Las curvas **rojas** superiores las descartamos porque, si bien son supersónicas a grandes distancias, también requieren ser supersónicas en la superficie solar.
- La solución de **viento solar** es la curva transcrítica **azul**, que es subsónica cerca de la superficie, alcanza la velocidad del sonido en el punto sónico y se vuelve supersónica a distancias grandes.
- La otra curva transcrítica **azul**, la vemos la próxima clase.



Viento solar (Parker 1958)

- La velocidad del viento solar ha sido medida con bastante detalle por muchas sondas espaciales.
- La figura muestra un diagrama polar de velocidad radial vs latitud. Son mediciones del satélite ULYSSES, que orbitó varias veces alrededor del Sol.
- La dependencia con la latitud se debe al campo magnético solar, que no hemos tenido en cuenta.
- La velocidad medida oscila entre 400 km/s para el viento lento en la zona ecuatorial y 800 km/s para el viento rápido lejos del ecuador.
- La **velocidad del sonido** para el plasma coronal con $T \approx 2 - 3 \cdot 10^6 \text{ K}$ es

$$c_s \approx 100 - 150 \text{ km/s}$$

- La masa del Sol es de $M_{sol} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ y entonces el **punto sónico** esta ubicado en

$$r_s = \frac{G M_{sol}}{2 c_s^2} \approx 4 - 5 R_{sol}$$

- El radio del Sol es $R_{sol} = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$

