

Clase anterior

- Evolución estelar. Estrellas de baja masa ($M \leq 8 M_{sol}$) y de alta masa.
- Enanas blancas.
- Gas de Fermi. Degeneración de electrones. Longitud de *de Broglie*.
- Función de distribución de Fermi-Dirac. Cálculo de densidad, energía interna y presión.
- Caso no relativista: $p \propto \rho^{5/3}$
- Caso ultra-relativista: $p \propto \rho^{4/3}$
- Masa de Chandrasekhar: $M_{Ch} \approx 1.46 M_{sol}$

Estrellas de neutrones y agujeros negros

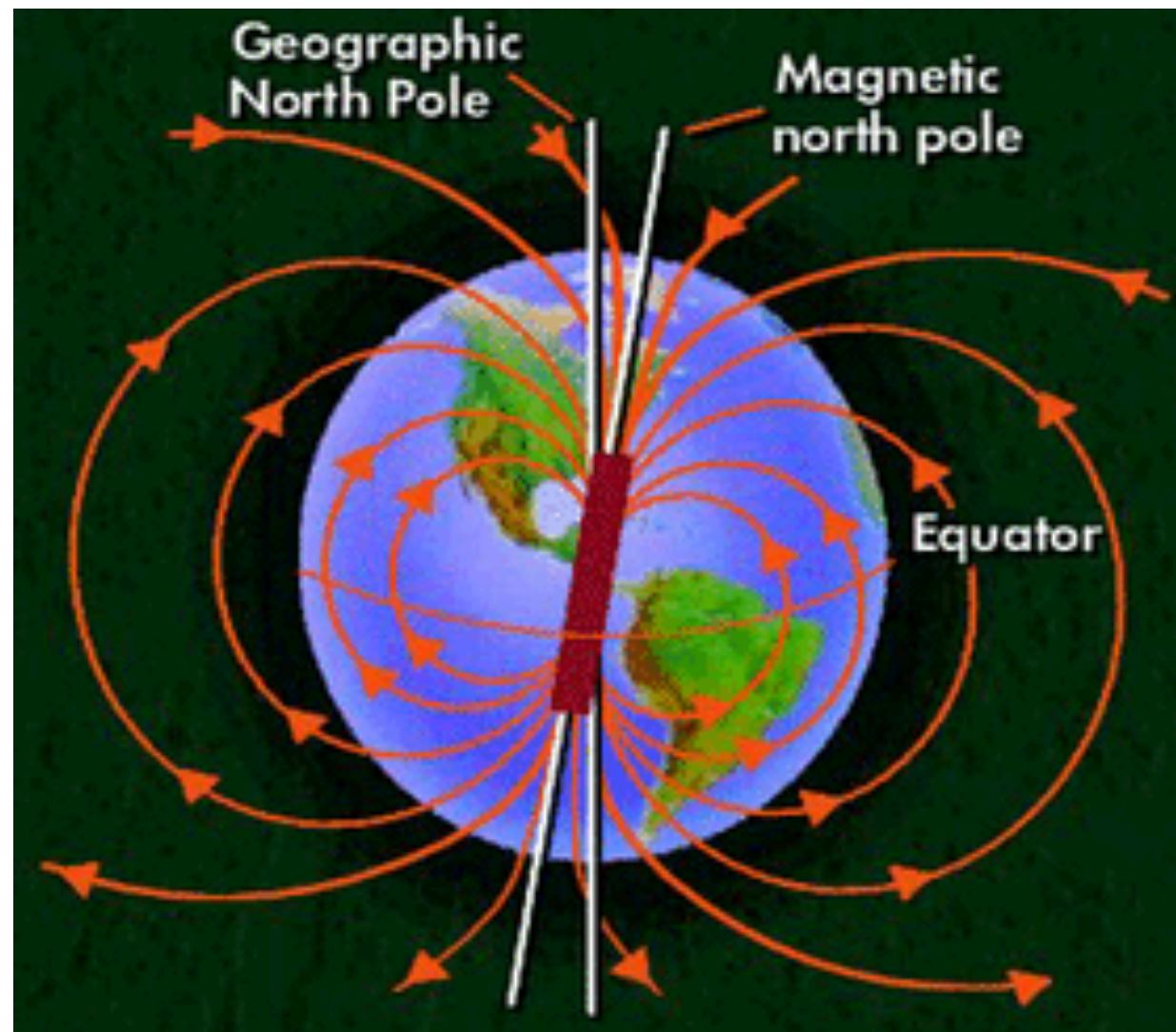
- Si una estrella que agotó su combustible nuclear tiene $M < M_{Ch} \approx 1.46 M_{sol}$, se transformará en **enana blanca**.
- Pueden probar obtener la masa de Chandrasekhar resolviendo Lane-Emden para $n = 4/3$.
- Si $M > M_{Ch}$, entonces la presión de Fermi de electrones será insuficiente y continuará colapsando.
- Si $M \approx 2 - 3 M_{sol} \rightarrow$ estrella de neutrones
- Si $M \geq 2 - 3 M_{sol} \rightarrow$ agujero negro
- En las **estrellas de neutrones**, las densidades son mucho mas altas que para enanas blancas. Los neutrones no sobreviven en estado libre porque decaen en: $n \rightarrow p + e + \hat{\nu}$. Pero a altas densidades, se favorece el proceso inverso: $p + e \rightarrow n + \nu$. Los neutrones se comportan tambien como un gas de Fermi con longitud de *de Broglie* mucho mas compacta.
- Para evaluar si necesitamos (o no) recurrir a **Relatividad General**, pensemos por ejemplo en la velocidad de escape de un objeto de masa M y radio R es $v_{esc}^2 = 2GM/R$. Es decir que se requieren velocidades mayores para escapar de objetos de mayor M o de menor R . Si tengo que alcanzar a velocidades $v_{esc} \approx c$ para poder escapar, entonces debemos considerar Relatividad General.
- En síntesis, debemos recurrir a Relatividad General si

$$f = \frac{2GM}{c^2 R} \approx 1$$

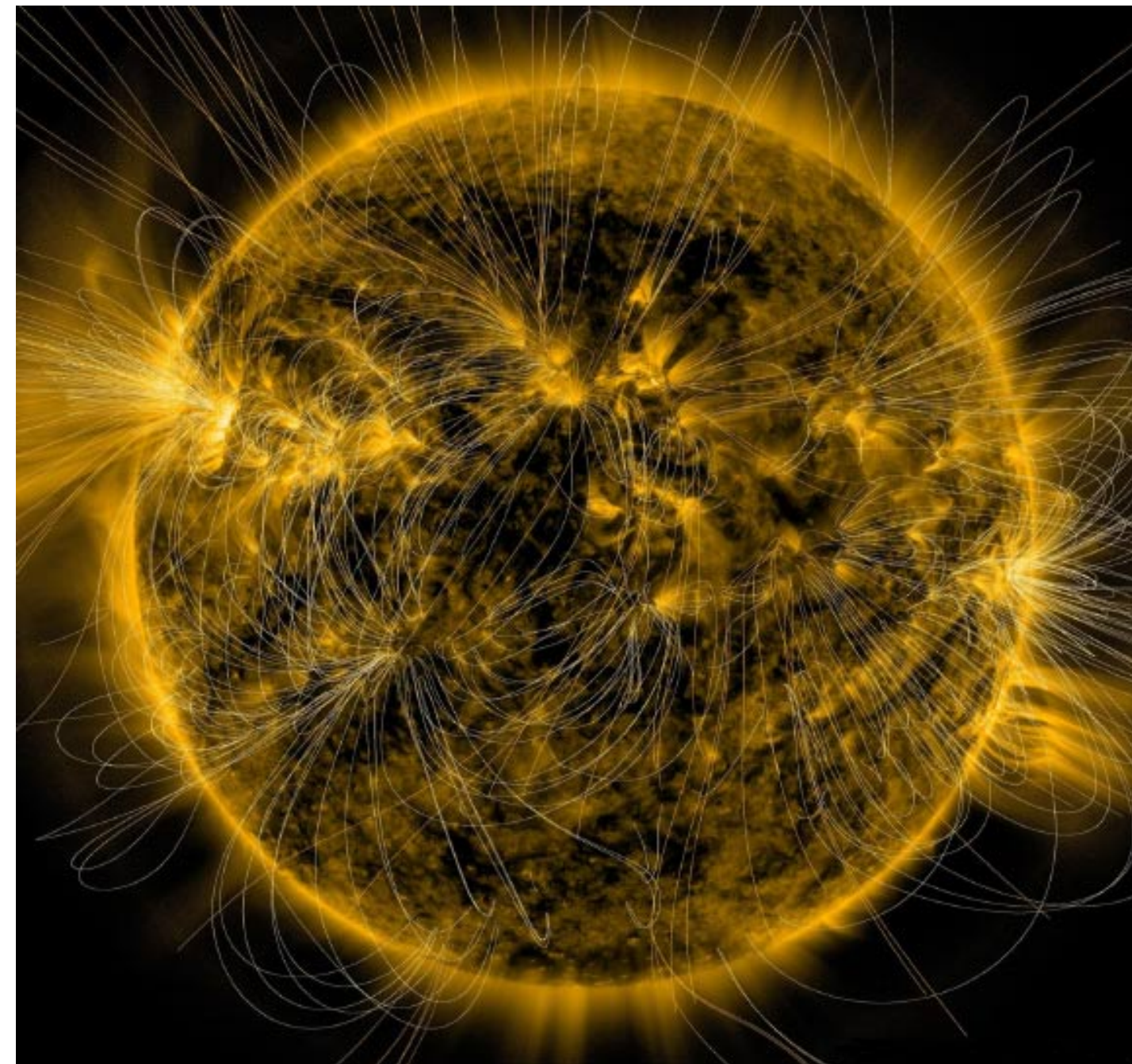
- Por lo general $f \ll 1$. Para la masa y radio del Sol, por ejemplo es $f_{sol} \approx 5 \cdot 10^{-6}$. Para una estrella de neutrones, con $M \approx 2M_{sol}$ y un radio de 10 km, es $f_{neu} \approx 0.6$, es decir, que los efectos de Relatividad General empiezan a importar.

Campos magnéticos en Astrofísica

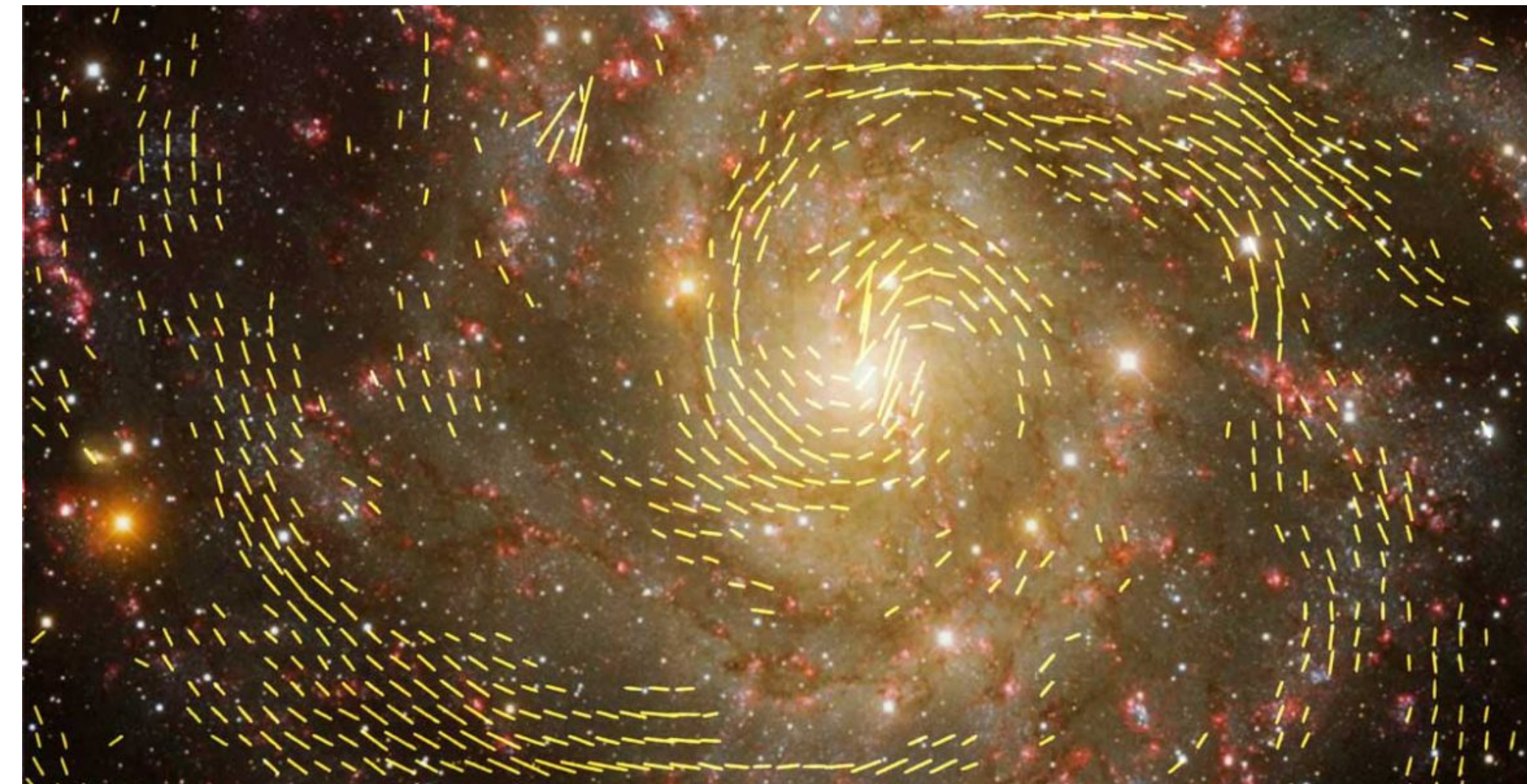
- Hasta ahora nos ocupamos de la interacción de **materia** con **radiación** por un lado y con el **campo gravitatorio** por el otro.
- Pero el hidrógeno, a temperaturas por encima de 8000 K es un gas electricamente cargado, es decir un **plasma**, y por lo tanto interactúa también con campos eléctrico y magnético.
- Tenemos campos magnéticos asociados con virtualmente todos los objetos astrofísicos:



En la Tierra y en la mayoría de los **planetas** del sistema solar



En el Sol y en **estrellas** de todos los tipos espectrales.



En la vía Láctea y en todas las **galaxias**.

Dinámica de fluidos cargados

- Necesitamos ecuaciones para la dinámica de **plasmas**. En el caso mas simple, supongamos hidrógeno totalmente ionizado.
- Podemos pensar en una descripción de dos fluidos: **electrones** de masa m_e y carga $-e$ y **protones** de masa m_p y carga $+e$.

$$\partial_t (m_s n_s) + \nabla \cdot (m_s n_s \underline{u}_s) = 0 \quad s = e, p$$

$$m_s n_s \left[\partial_t \underline{u}_s + (\underline{u}_s \cdot \nabla) \underline{u}_s \right] = q_s n_s \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u}_s \times \underline{B} \right)$$

$$- \nabla p_s \pm \underline{R}$$

- La primera es la ec. continuidad para c/especie.
- La segunda es la ec. movimiento por unidad de volumen, con fuerzas eléctrica y magnética.
- $\underline{R}$ es la fuerza de fricción (colisional) entre especies.
- Esta fuerza es proporcional a la frecuencia colisional ν_{ep} y para los electrones vale

$$\underline{R} = - m_e n_e \nu_{ep} (\underline{u}_e - \underline{u}_p)$$

NOTA: $m_e n_e \nu_{ep} = m_p n_p \nu_{pe}$

- Ese gas de dos especies tiene densidad de carga

$$\rho_c = e(n_p - n_e) \approx 0 \rightarrow n_e = n_p$$

porque los electrones se mueven inmediatamente para neutralizar.

- También conlleva una densidad de corriente

$$\underline{j} = \sum_s q_s n_s \underline{u}_s \rightarrow \underline{j} = en (\underline{u}_p - \underline{u}_e)$$

- Noten que entonces $\underline{R}$ puede escribirse en términos de $\underline{j}$:

$$\underline{R} = \frac{m_e \nu_{ep}}{e} \underline{j} = \frac{en}{\sigma} \underline{j}$$

donde σ es la conductividad eléctrica de un plasma.

Descripción Magnetohidrodinámica (MHD)

- Suponiendo $m_e \ll m_p$, este fluido de dos especies tiene

$$\rho = m_p n_p + m_e n_e \approx m_p n$$

$$\underline{u} = \frac{m_p n_p \underline{u}_p + m_e n_e \underline{u}_e}{m_p n_p + m_e n_e} \approx \underline{u}_p$$

$$p = p_p + p_e$$

- La ecuación de continuidad resulta

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

- Si sumamos las ecs. movimiento:

$$\rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] = en (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u}_p \times \underline{B}) - \nabla p_p - \underline{R}$$

$$0 = -en (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u}_e \times \underline{B}) - \nabla p_e + \underline{R}$$

$$\rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] = \frac{1}{c} \underline{j} \times \underline{B} - \nabla p$$

- Noten que la fuerza eléctrica sobre el fluido es nula (pero $\underline{E} \neq 0$) y la fuerza de fricción también.

- Sumando las ecs. obtuvimos la ec. movimiento del fluido. Pero nos falta otra ecuación.

- De la ecuación para los electrones, podemos despejar el campo $\underline{E}$:

$$\underline{E} = -\frac{1}{c} (\underline{u} - \frac{\underline{j}}{en}) \times \underline{B} - \frac{1}{en} \nabla p_e + \frac{1}{\sigma} \underline{j}$$

- Esta ecuación es la llamada ley de Ohm generalizada. Hemos utilizado

$$\underline{j} = en(\underline{u} - \underline{u}_e) \rightarrow \underline{u}_e = \underline{u} - \frac{1}{en} \underline{j}$$

- Para densidades no demasiado bajas, podemos despreciar los términos " $\frac{1}{en}$ " y obtener

$$\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \times \underline{B} \approx \frac{1}{\sigma} \underline{j} \quad \text{Ley de Ohm}$$

- Si tenemos en cuenta que $\underline{E}^* = \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \times \underline{B}$ es el campo en el referencial del fluido, tenemos la ley de Ohm de cualquier medio conductor

Descripción Magnetohidrodinámica (MHD)

• Los campos $\underline{E}$ y $\underline{B}$ no son en general campos externos conocidos, sino campos autoconsistentes. Nos falta entonces una ecuación para $\underline{B}$.

• Tomamos el " $\nabla \times$ " de la ley de Ohm y recurrimos a las ecs. Maxwell:

$$\nabla \times \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \times \underline{B} \right) = \frac{1}{\sigma} \nabla \times \underline{j}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \underline{B} \\ \underline{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{B} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{c} \partial_t \underline{B} + \frac{1}{c} \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \underline{B})$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \rightarrow \partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

donde $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$; resistividad Ec. inducción

• Con la ec. inducción completamos entonces el sistema de ecuaciones MHD.

$$\text{Ecs. MHD} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \\ \partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} \\ \partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B} \\ \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \times \underline{B} = \frac{1}{\sigma} \underline{j} \end{array} \right.$$

Para comparar la importancia relativa de los términos del lado derecho de la ec. inducción, definimos el número de Reynolds magnético

$$R_m = \frac{\| \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) \|}{\eta \| \nabla^2 \underline{B} \|} \sim \frac{u_0 B_0 / L_0}{\eta B_0 / L_0^2} \sim \frac{u_0 L_0}{\eta}$$

$$R_m = \frac{u_0 L_0}{\eta} \ll 1 \rightarrow \partial_t \underline{B} \sim \eta \nabla^2 \underline{B} \rightarrow \text{difusión de } \underline{B}$$

$$R_m = \frac{u_0 L_0}{\eta} \gg 1 \rightarrow \partial_t \underline{B} \sim \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) \rightarrow \text{congelamiento campo-materia}$$

Congelamiento campo-materia

- Mostraremos que la ecuación $\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B})$ implica que las líneas de $\underline{B}$ son advectadas.

- Sea C una curva cerrada que se mueve con el plasma

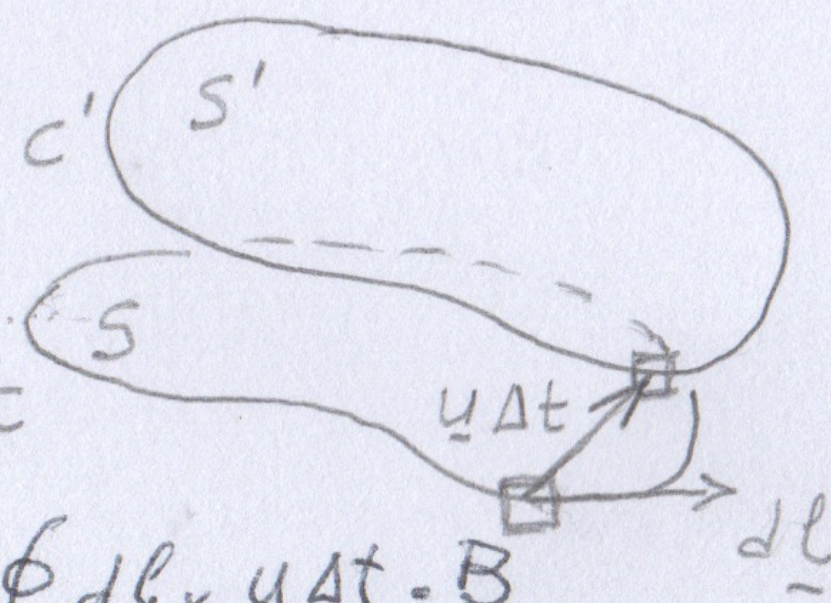
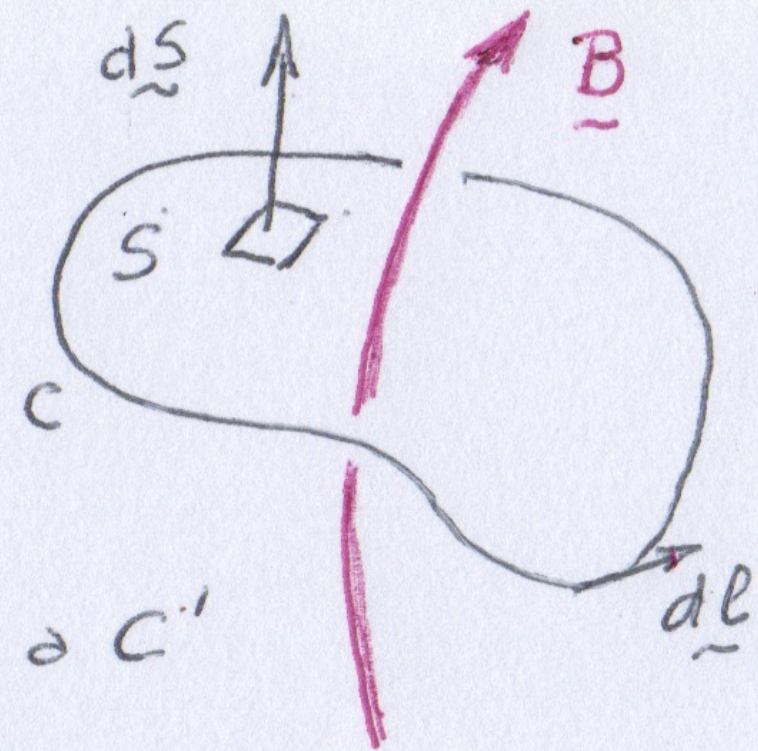
El flujo de $\underline{B}$ a través de S en t es:

$$\Phi(S, t) = \iint_S d\underline{S} \cdot \underline{B}$$

- Entre t y Δt , C evoluciona a C'

y S a S' . Como $\nabla \cdot \underline{B} = 0$, el flujo en una superficie cerrada es:

$$0 = \oint d\underline{S} \cdot \underline{B} = - \iint_S d\underline{S} \cdot \underline{B} + \iint_{S'} d\underline{S} \cdot \underline{B} + \oint_C d\underline{l} \times \underline{u} \Delta t \cdot \underline{B}$$



- El flujo de $\underline{B}$ en S' a $t + \Delta t$ es

$$\Phi(S', t + \Delta t) = \iint_{S'} d\underline{S} \cdot [\underline{B} + \Delta t \partial_t \underline{B}] \approx \iint_{S'} d\underline{S} \cdot \underline{B} + \Delta t \iint_S d\underline{S} \cdot \partial_t \underline{B}$$

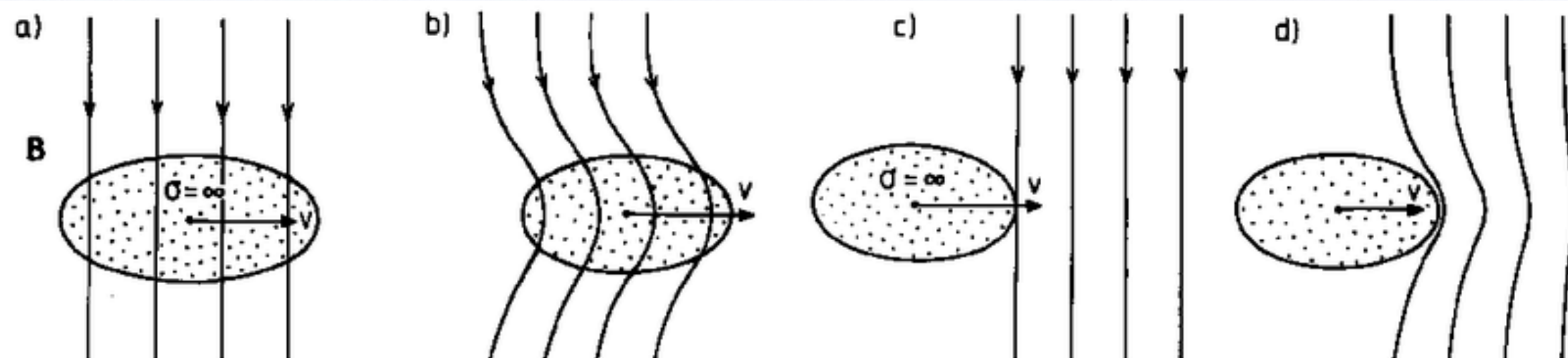
- Entonces:

$$\Phi(S', t + \Delta t) - \Phi(S, t) = \underbrace{\iint_{S'} d\underline{S} \cdot \underline{B} - \iint_S d\underline{S} \cdot \underline{B}}_{= \Delta t \oint_C d\underline{l} \times \underline{u} \cdot \underline{B} \text{ (ver ec. ant.)}} + \Delta t \iint_S d\underline{S} \cdot \partial_t \underline{B}$$

- Usando el teorema de Stokes:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi(S', t + \Delta t) - \Phi(S, t)}{\Delta t} = \iint_S d\underline{S} \cdot [\partial_t \underline{B} - \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B})] = 0 \quad \forall S$$

- Es decir que para $R_m \rightarrow \infty$, se conserva el flujo magnético que atraviesa cualquier curva cerrada que se mueva con el plasma.



- El congelamiento implica que los elementos de fluido arrastran en su movimiento a las líneas de $\underline{B}$ que los atraviesan.

- Inversamente, las líneas de $\underline{B}$ arrastran a los elementos de fluido enhebrados a ellas.