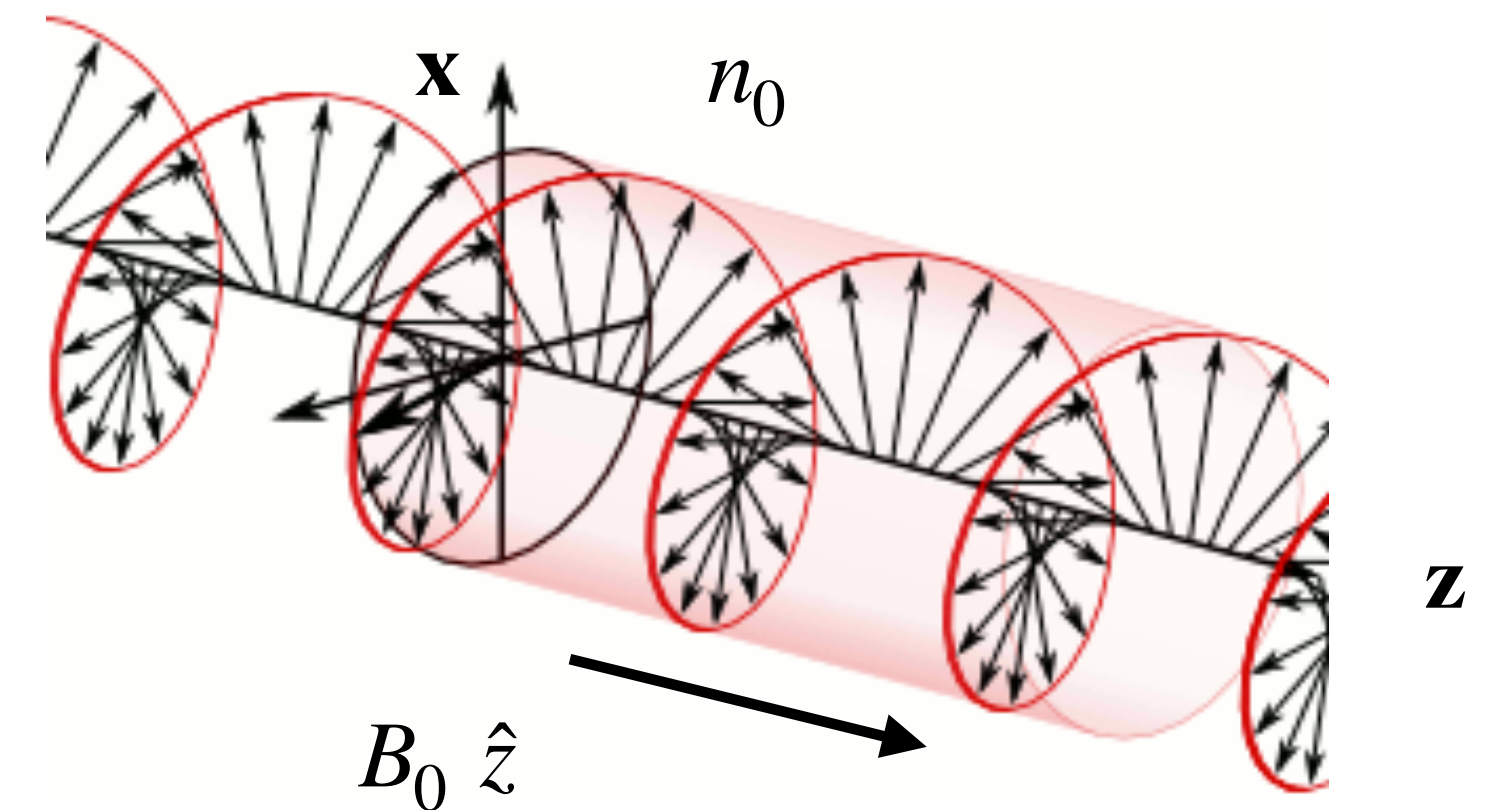


Clase anterior

- Ecuaciones MHD. Descripción fluidística de plasmas.
- Fuerzas de presión y tensión magnética.
- Ondas MHD incompresibles: ondas de Alfvén.
- Rol de la presión magnética en el colapso gravitatorio.
- Modelo MHD de viento solar: espiral de Parker.

Rotación de Faraday

- La rotación de Faraday es una rotación del plano de polarización de una onda EM linealmente polarizada al propagarse a lo largo de un campo magnético en presencia de un plasma.
- El campo $\underline{E}$ asociado al pasaje de una onda EM a través de un plasma, pone en movimiento a los electrones y por lo tanto induce una corriente $\underline{J} = -e n_0 \underline{v}$



- A primer orden en $\underline{E}, \underline{B}, \underline{v}, \underline{J}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\underline{J} = -en_0 \underline{v}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{E}$$

$$m \dot{\underline{v}} = -e \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times (B_0 \hat{z}) \right)$$

- Suponemos que todas las cantidades perturbadas satisfacen $f \sim e^{ikz - i\omega t}$

$$k \hat{z} \times \underline{E} = \frac{\omega}{c} \underline{B}$$

$$k \hat{z} \times \underline{B} = -\frac{\omega}{c} \underline{E} + \frac{4\pi en_0 i}{c} \underline{v}$$

$$B_z = 0 = E_z$$

$$m\omega \underline{v} = -ie \left(\underline{E} + \frac{B_0}{c} \underline{v} \times \hat{z} \right)$$

$$\text{Sup } v_z(0) = 0$$

- Los campos satisfacen $\underline{E}, \underline{B}, \underline{v} \perp \hat{z}$

- Verifiquen que se llega a

$$\begin{pmatrix} \omega \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \right) & i\omega_c \\ -i\omega_c & \omega \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \right) \end{pmatrix} \underline{E} = 0$$

donde $\omega_c = \frac{eB_0}{mc}$: frecuencia de ciclotrón

$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$: frecuencia de plasma

- La relación de dispersión resulta:

$$\det() = 0 \rightarrow \omega \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \right) = \pm \omega_c$$

- La polarización está dada por $\pm \omega_c E_x + i\omega_c E_y = 0$

$$\therefore E_y = \pm i E_x \quad \text{pol. circular} \quad \begin{matrix} + = R \\ - = L \end{matrix}$$

Rotación de Faraday

- La relación de dispersión puede re-escribirse como

$$\frac{k_{\pm}^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)}$$

Noten que $k_- > k_+$

- Noten que en ausencia de plasma

$$n_0 = 0 \rightarrow \omega_p = 0 \rightarrow \omega = \pm kc \quad (\text{onda EM en vacío})$$

independientemente de la presencia de $B_0 \hat{z}$.

- Los modos R, L corresponden a

$$\underline{E}^R = (\hat{x} + i\hat{y}) e^{ik_+ z - i\omega t}$$

$$\underline{E}^L = (\hat{x} - i\hat{y}) e^{ik_- z - i\omega t}$$

- Supongamos en $z=0$ (fuente luminosa) una onda linealmente polarizada según $\hat{x}$ ($\underline{E} \parallel \hat{x}$). Dicha onda puede descomponerse en ondas circularmente polarizadas R y L.

- La diferente velocidad de propagación de las ondas R y L, se traduce en una rotación del plano de polarización a medida que se propaga:

$$\underline{E} = \underline{E}^R + \underline{E}^L \rightarrow \tan \beta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{i(e^{ik_+ z} - e^{ik_- z})}{e^{ik_+ z} + e^{ik_- z}}$$

$$\begin{aligned} \text{Def. } K &= \frac{k_- + k_+}{2} \\ \Delta &= \frac{k_- - k_+}{2} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} k_- = K + \Delta \\ k_+ = K - \Delta \end{array} \right. \rightarrow \tan \beta = i \frac{e^{-i\Delta z} - e^{i\Delta z}}{e^{-i\Delta z} + e^{i\Delta z}}$$

$$\text{Es decir que } \beta = \Delta z = \frac{k_- - k_+}{2} z$$

$$\therefore \beta = \frac{z}{2} \left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}} \right]$$

$$\text{Sup. } \omega \sim kc \gg \omega_p, \omega_c \rightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)} \ll 1$$

$$\beta \approx \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c \omega^2} z$$

que puede re-escribirse como

$$\beta = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^z n_e(z) B_{||}(z) dz$$

Efecto dínamo

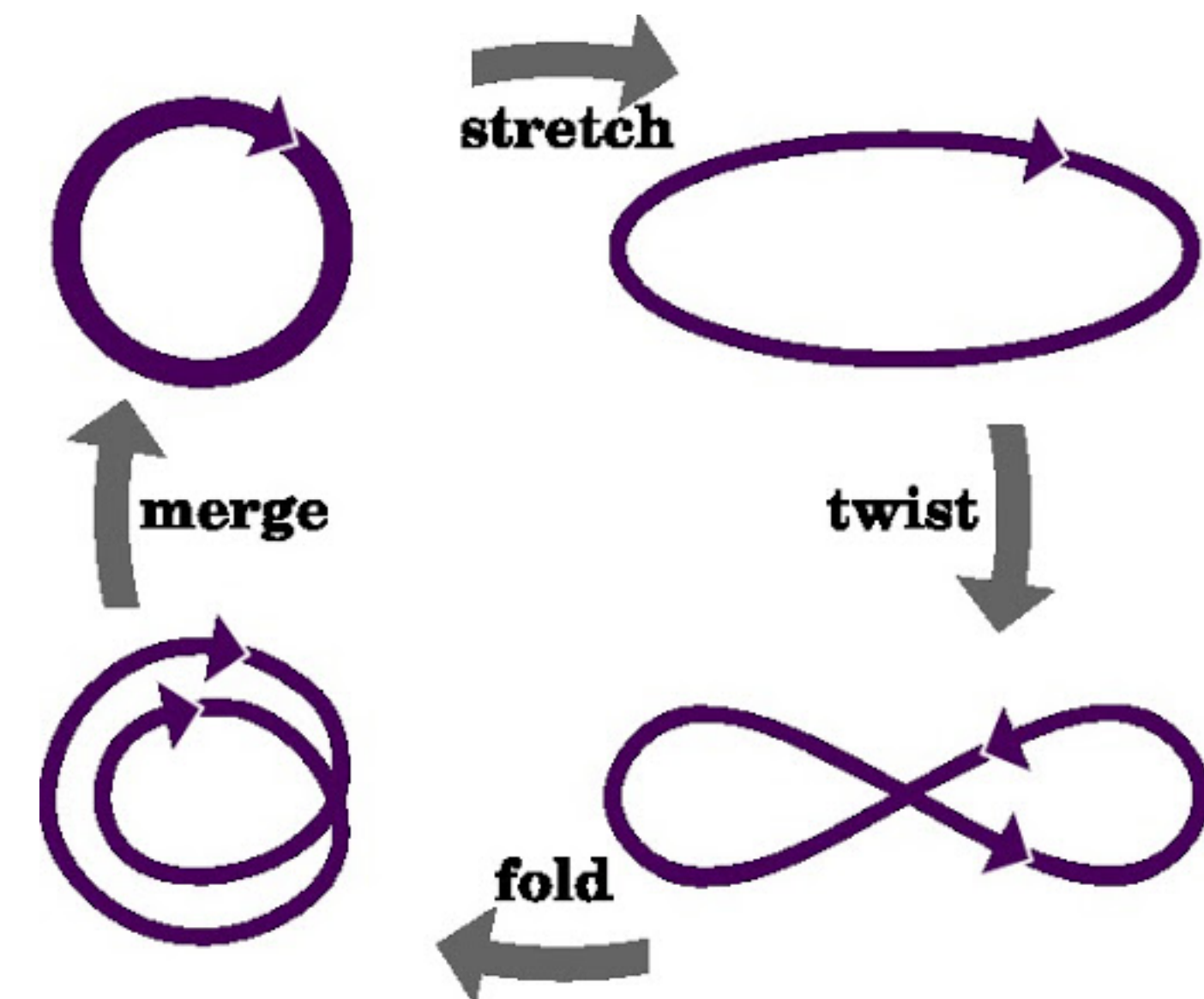
- Queremos estudiar ahora posibles mecanismos de generación de campo magnético en objetos astrofísicos.

- Para ello, notemos que de la ecuación de inducción
$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

obtenemos dos corolarios inmediatos: (i) Si $\underline{B}(t = 0) = 0 \rightarrow \underline{B}(t) = 0, \forall t$

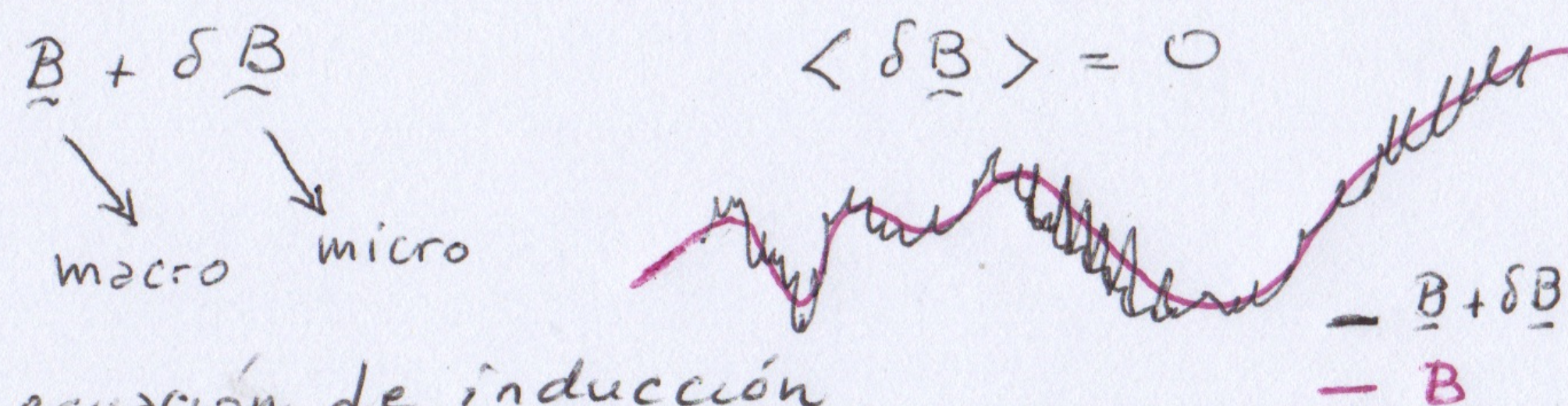
$$(ii) \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = L \cdot \underline{B} \rightarrow \underline{B} \propto \underline{B}_0 e^{\lambda t}, \text{ donde } \lambda \text{ es autovalor de } L.$$

- Es decir que, en el marco de la MHD, si el $\underline{B}$ inicial es cero, entonces seguirá siendo cero. Pero si existe una semilla inicial $\underline{B}_0$, aún pequeña, puede crecer exponencialmente rápido.
- Una forma de imaginar este crecimiento de $\underline{B}$ consiste en el modelo conocido como *stretch — twist — fold*, donde seguimos un tubo magnético cerrado que conserva flujo magnético y volumen: $\Phi_0 = B A$, $V_0 = AL$
- En el paso de *stretch*: $L \rightarrow 2L$, $A \rightarrow A/2$, $B \rightarrow 2B$
- En el paso de *switch*, el tubo toma la forma de un “ocho”, conservando su longitud.
- En el *fold*, el “ocho” se pliega sobre si mismo, si bien las líneas de B conservan longitud.
- En el *merge*, luego de una leve reconexión en el punto de cruce, recupero un tubo de area A y longitud L , pero la intensidad de su campo magnético es $2B$.



Modelo de campo medio: efecto alpha

- En 1965 Steenbeck, Krause & Radler desarrollaron un modelo de dinamo basado en teoría de campo medio. Suponen a los campos $\underline{u}$ y $\underline{B}$ como



- En la ecuación de inducción

$$\partial_t (\underline{B} + \delta \underline{B}) = \nabla \times [(\underline{u} + \delta \underline{u}) \times \underline{B} + \delta \underline{B}] + \eta_0 \nabla^2 (\underline{B} + \delta \underline{B})$$

- Promediando $\langle \rangle$ sobre la microescala:

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \nabla \times \langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle + \eta_0 \nabla^2 \underline{B}$$

Vemos que la dinámica micro tiene un efecto sobre la macro a través de $\langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle$.

- Para tener la evolución micro, restamos las ecuaciones:

$$\partial_t \delta \underline{B} = \nabla \times [\delta \underline{u} \times \underline{B} + \underline{u} \times \delta \underline{B}] + \nabla \times [\delta \underline{u} \times \delta \underline{B} - \langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle] + \eta_0 \nabla^2 \delta \underline{B}$$

- Para continuar, en la última ecuación suponemos

$$(i) R_m \gg 1 \rightarrow \eta_0 \nabla^2 \delta \underline{B} \approx 0$$

$$(ii) \underline{u} = 0 \rightarrow \text{en el ref. del fluido}$$

$$(iii) \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} - \langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle \approx 0$$

$$\therefore \partial_t \delta \underline{B} \approx \nabla \times (\delta \underline{u} \times \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \nabla) \delta \underline{u} - (\delta \underline{u} \cdot \nabla) \underline{B}$$

- Suponemos que el campo de velocidades micro es turbulento y τ es su tiempo de correlación. Entonces

$$\delta \underline{B} \approx \tau (\underline{B} \cdot \nabla) \delta \underline{u} - \tau (\delta \underline{u} \cdot \nabla) \underline{B}$$

- Con esta expresión, calculamos $\langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle$, que podemos interpretar como una fem generada por la dinámica de la microescala:

$$\underline{E}_{fem} = -\frac{1}{c} \langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle$$

$$E_i = -\frac{1}{c} \langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle_i = -\frac{\tau}{c} \epsilon_{ijk} \langle \delta u_j \partial_l \delta u_k \rangle B_l + \frac{\tau}{c} \epsilon_{ijk} \langle \delta u_j \delta u_l \rangle \partial_l B_k$$

Modelo de campo medio: efecto alpha

- Noten que podemos reescribir los dos términos de la ecuación anterior como:

$$\langle \delta \underline{u} \times \delta \underline{B} \rangle_i = \alpha_{il} B_l + \beta_{ilk} \partial_l B_k$$

donde

$$\alpha_{il} = \tau \epsilon_{ijk} \langle \delta u_j \partial_l \delta u_k \rangle$$

$$\beta_{ilk} = -\tau \epsilon_{ijk} \langle \delta u_j \delta u_l \rangle$$

- Si la turbulencia micro puede suponerse isotrópica, los tensores $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$ deben satisfacer:

$$\alpha_{il} = \alpha \delta_{il} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{3} \alpha_{ii} = -\frac{\tau}{3} \langle \delta \underline{u} \cdot \nabla \times \delta \underline{u} \rangle$$

$$\beta_{ilk} = -\beta \epsilon_{ilk} \longrightarrow \beta = \frac{\tau}{3} \langle |\delta \underline{u}|^2 \rangle$$

donde usamos $\alpha_{ii} = \tau \epsilon_{ijk} \langle \delta u_j \partial_i \delta u_k \rangle$
 $= \tau \langle \delta u_j \epsilon_{jki} \partial_i \delta u_k \rangle = -\tau \langle \delta u_j \delta \omega_j \rangle$

- Para β usamos (i) $\epsilon_{ilk} \epsilon_{ilk} = 6$

$$(ii) \epsilon_{ilk} \epsilon_{ijk} = 2 \delta_{lj}$$

- Entonces, la dinámica macro resulta;

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \nabla \times (\alpha \underline{B}) + (\eta_0 + \beta) \nabla^2 \underline{B}$$

- El efecto α puede producir un incremento exponencial de $\underline{B}$, donde

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \delta \underline{u} \cdot \nabla \times \delta \underline{u} \rangle$$

Para ello se requiere un flujo turbulento helicoidal, es decir, con $\delta \underline{u} \parallel \nabla \times \delta \underline{u}$. Las líneas de corriente son como tirabuzones, con una chiralidad preferencial.

- El efecto β también es un impacto de la dinámica micro sobre la macro, que se traduce en una mayor resistividad: $\eta_{eff} = \eta_0 + \frac{\tau}{3} \langle |\delta \underline{u}|^2 \rangle$