

Clase anterior

- Ecuaciones MHD. Descripción fluidística de plasmas.
- Regímenes de congelamiento y difusivo.
- Reconexión magnética.
- Modelo de Sweet-Parker.
- Tasa de reconexión: $R \approx S^{-1/2}$
- Reconexión difusiva y reconexión rápida.

Ecuaciones MHD — Presión magnética

- Recordemos las ecuaciones MHD:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\rho (\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}$$

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

- Podemos descomponer la fuerza magnética a través de una identidad vectorial

$$\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}}_{\text{tensión magnética}} - \underbrace{\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right)}_{\text{presión magnética}}$$

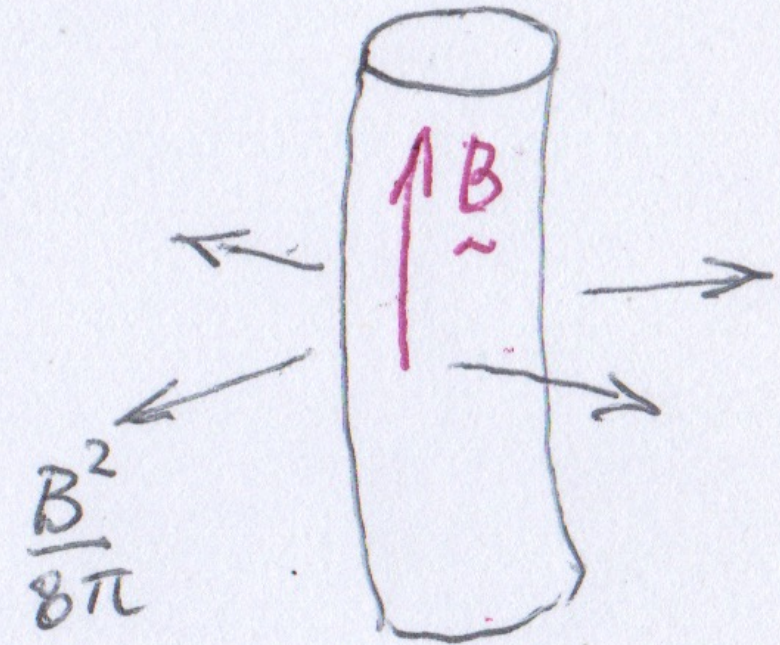
$$\begin{aligned} [(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}]_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jhl} \partial_h B_l B_k \\ &= \epsilon_{jki} \epsilon_{jhl} \partial_h B_l B_k \\ &= B_k \partial_k B_i - B_k \partial_i B_k = \left[(\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} \right]_i - \left[\nabla \frac{B^2}{2} \right]_i \end{aligned}$$

Presión magnética

- El término de presión magnética se suma directamente a la presión del gas

$$p_{\text{TOT}} = p_{\text{gas}} + \frac{B^2}{8\pi}$$

- La presión magnética actúa en las direcciones perpendiculares al tubo de flujo magnético (tubo = manojito de líneas).



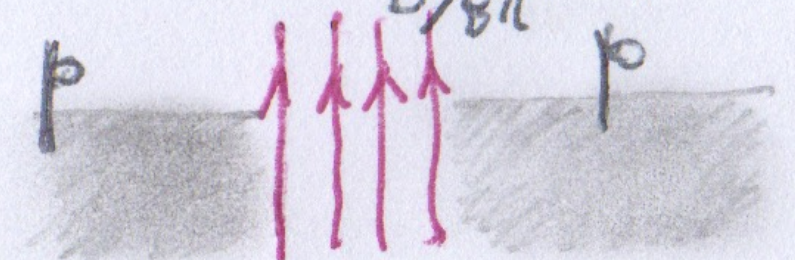
- El parámetro β mide la importancia relativa entre presiones

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$$

$\beta \gg 1$ campo $\underline{B}$ despreciable

$\beta \ll 1$ dominado por β

- Ejemplo: mancha solar



Ecuaciones MHD — Tensión magnética

- La tensión magnética mide la variación de $\underline{B}$ a lo largo de $\underline{B}$. Definimos la coordenada curvilínea s a lo largo de $\underline{B}$:

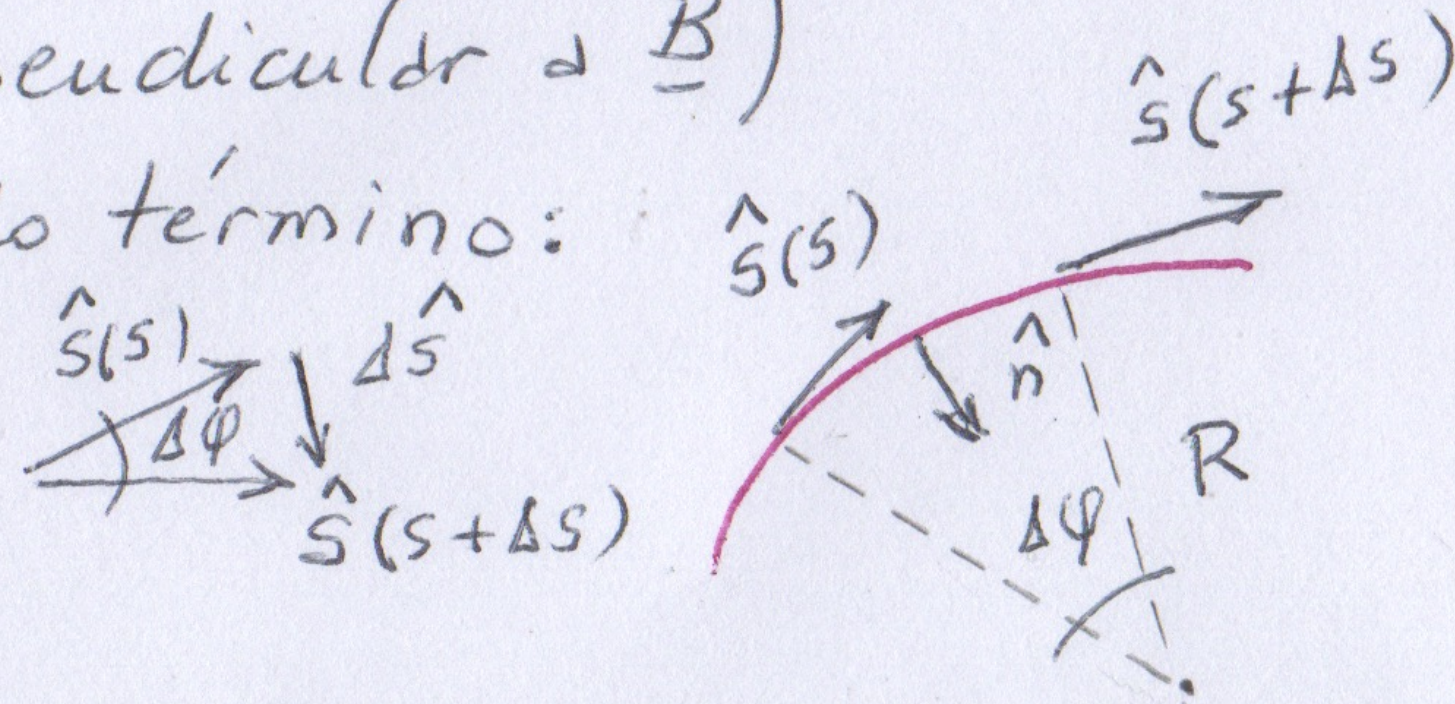
$$\underline{B} = B \hat{s} \rightarrow \frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = \frac{B}{4\pi} \frac{d}{ds} (B \hat{s})$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = \frac{d}{ds} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) \hat{s} + \frac{B^2}{4\pi} \frac{d\hat{s}}{ds}$$

- El primer término cancela al de presión magnética en la dirección de $\underline{B}$ (y por lo tanto la presión magnética opera en el plano localmente perpendicular a $\underline{B}$)

- Para el segundo término:

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{s}}{\Delta s}$$

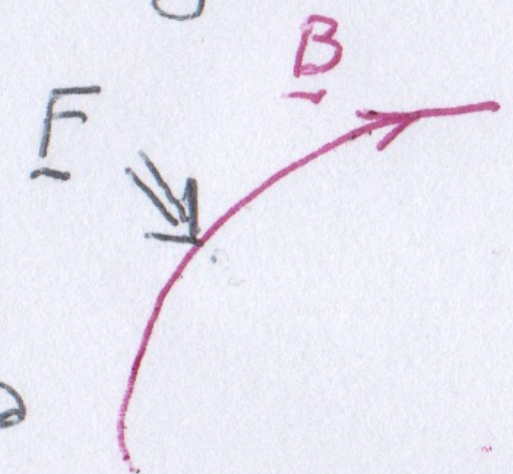


$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{s} &\approx \hat{n} |\hat{s}| \Delta \varphi \\ \Delta s &= R \Delta \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}$$

R : radio de curvatura

- Entonces la fuerza de tensión magnética

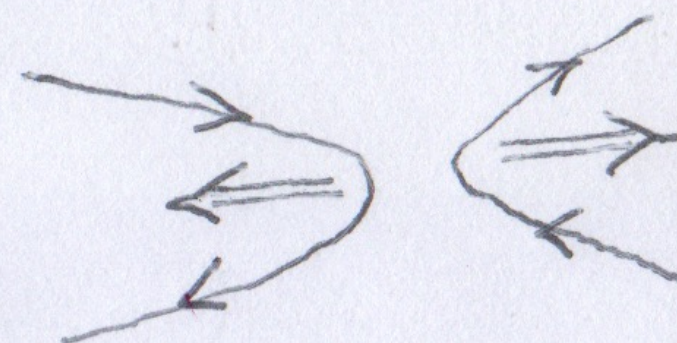
$$\frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\hat{n}}{R}$$



tiende a oponerse a la curvatura de las líneas.

- Ejemplo: líneas reconectadas

Apenas reconectadas, las líneas tienen una alta curvatura (R pequeño)



La tensión magnética acelera rápidamente a las líneas (y al plasma congelado a ellas)

hasta una velocidad $v_A = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}}$

Ecuaciones MHD — Ondas de Alfven

- Un equilibrio MHD homogéneo con un campo $\underline{B}_0$ uniforme, puede propagar ondas que hacen oscilar las líneas de $\underline{B}$ como cuerdas vibrantes.

- Supongamos que el fluido sea incompresible, es decir $\rho = \text{cte}$, y el equilibrio

$$\underline{u}_0 = 0$$

$$p_0 = p_0 = \text{cte}$$

$$\underline{B} = B_0 \hat{z}$$

- Perturbamos a primer orden

$$\underline{\nabla} \cdot \delta \underline{u} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \delta \underline{B}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \text{cte} \\ p = p_0 + \delta p \\ \underline{u} = \delta \underline{u} \\ \underline{B} = B_0 \hat{z} + \delta \underline{B} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \partial_t \delta \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \delta p + \frac{1}{4\pi\rho} (\underline{\nabla} \times \delta \underline{B}) \times \underline{B}_0 \\ \partial_t \delta \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\delta \underline{u} \times \underline{B}_0) \end{array}$$

Proponemos $\delta \underline{u}, \delta \underline{B} \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$

- Obtenemos $\underline{k} \cdot \delta \underline{u} = 0 = \underline{k} \cdot \delta \underline{B}$ (ondas transversales)

$$-\omega \delta \underline{u} = -\frac{\underline{k}}{\rho} \delta p + \frac{B_0}{4\pi\rho} (k_z \delta \underline{B} - k_z \delta B_z)$$

$$-\omega \delta \underline{B} = B_0 k_z \delta \underline{u}$$

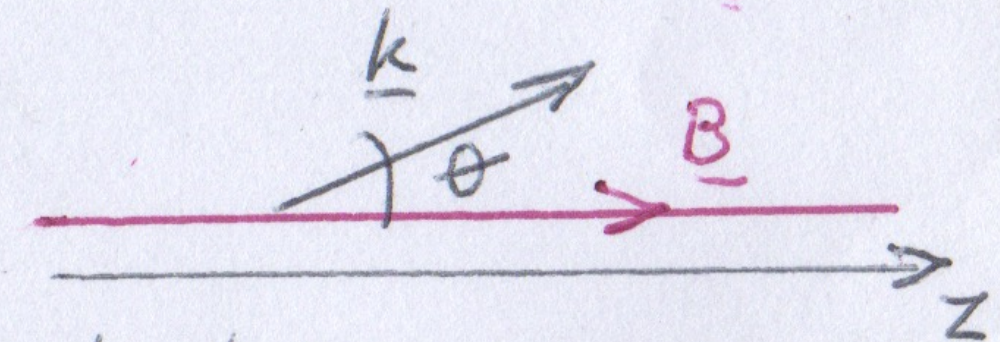
- Multiplicamos la primera ecuación por $\underline{k} \cdot (\dots)$ y obtenemos $\delta p = -\frac{B_0}{4\pi} \delta B_z$

- Combinando ahora ambas ecuaciones

$$\omega^2 = k_z^2 \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$$

- Definimos la velocidad de Alfven $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$

$$\omega = \pm v_A k \cos \theta$$



- Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones vectoriales, obtenemos las relaciones de polarización $\delta \underline{u} = \mp \frac{\delta \underline{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$

Ecuaciones MHD — Colapso gravitatorio

- En el colapso gravitatorio de un grumo de materia del medio interestelar, la compresión de campo magnético puede ser importante (¿?)

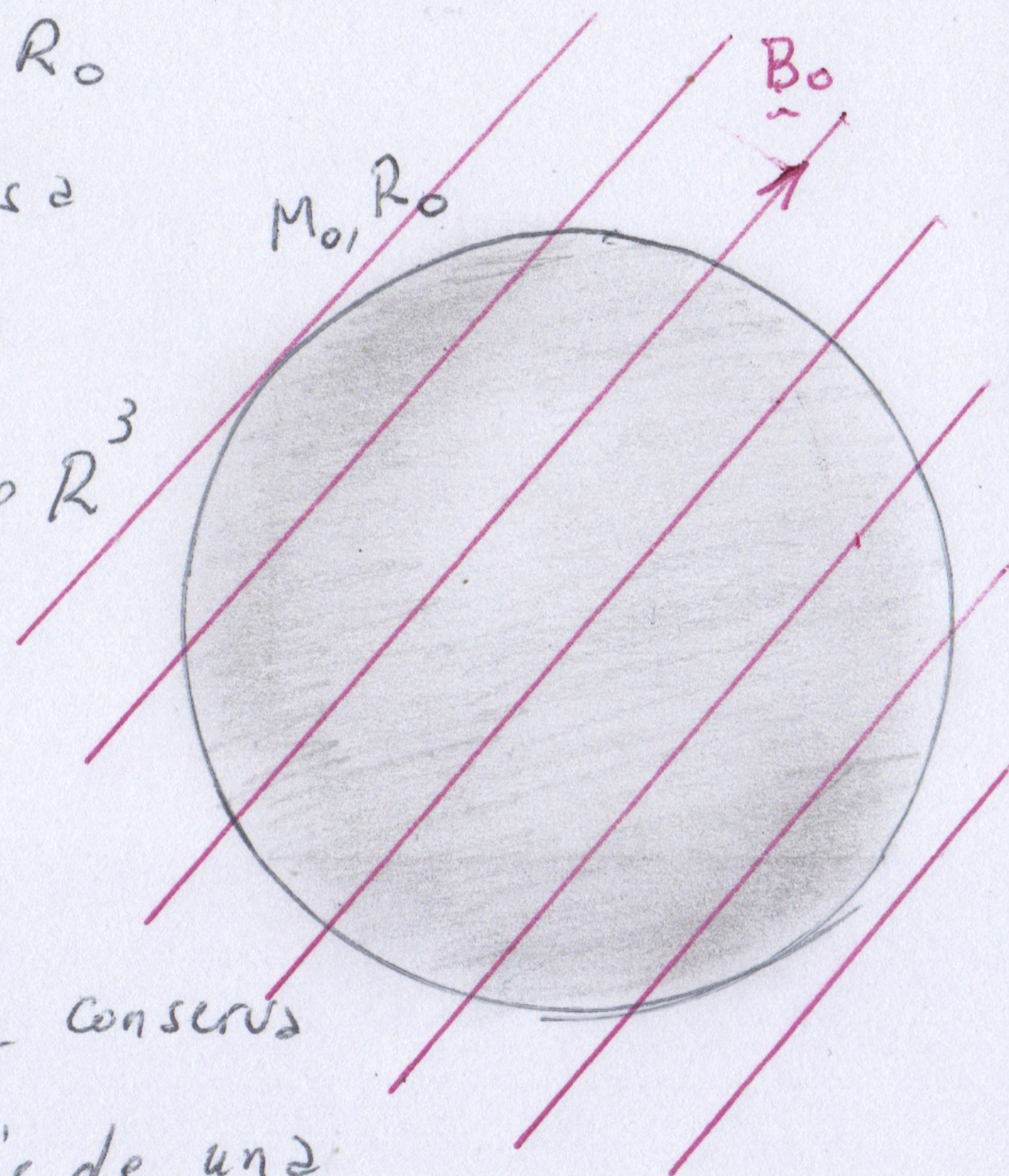
- Un grumo de radio R_0 con masa M_0 , colapsa conservando su masa

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3$$

- Por congelamiento, se conserva el flujo de $\underline{B}$ a través de una superficie perpendicular a $\underline{B}$ que colapsa con el grumo

$$\Phi_0 = B_0 \pi R_0^2 = B \pi R^2$$



- Entonces

$$B = B_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2$$

- Puede verse que la densidad de masa se compacta mas que la densidad de líneas de $\underline{B}$.

- Para ver que pasa con las presiones, supongamos que cumple una relación politrópica

$$\text{Entonces } p = p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}$$

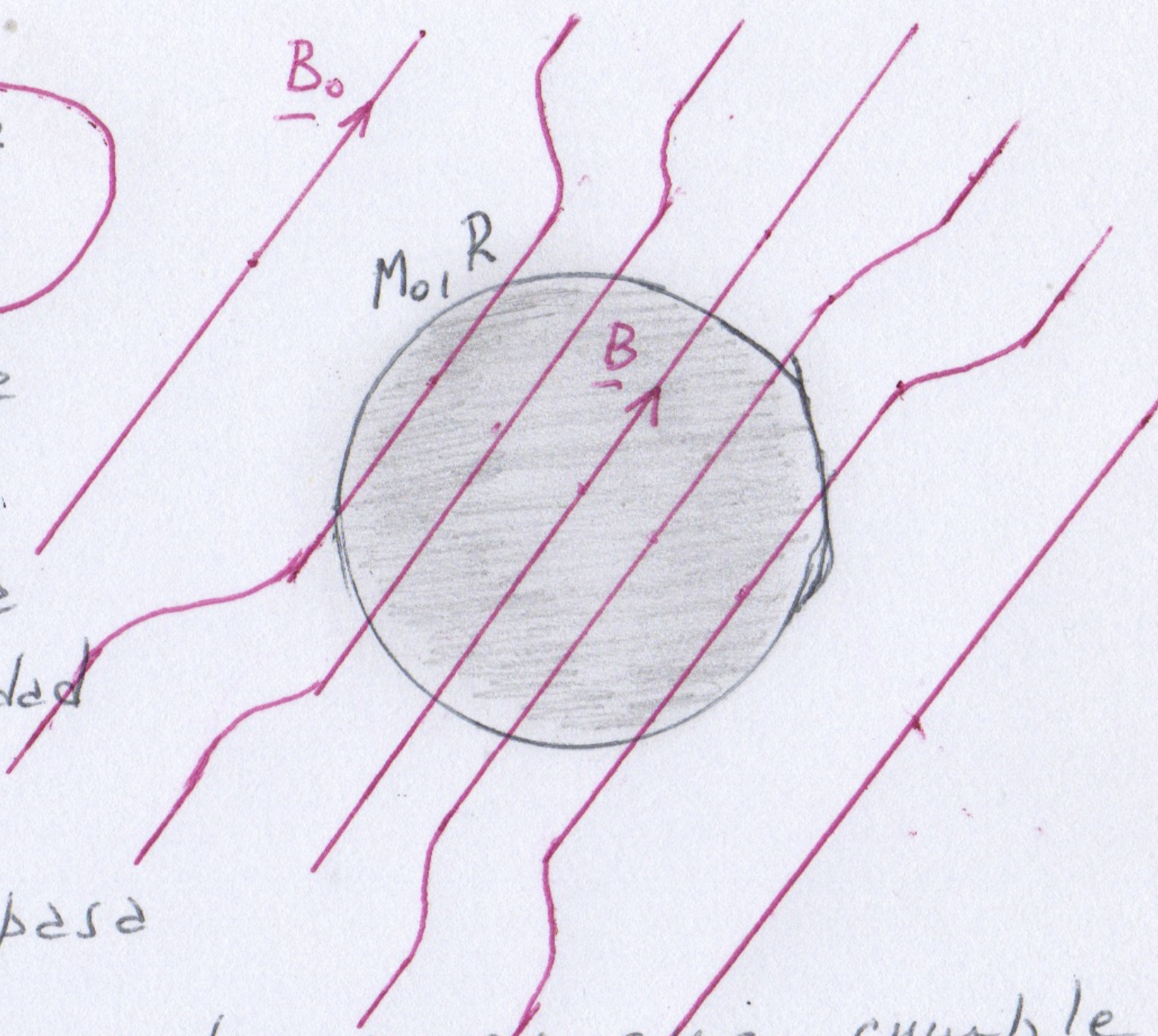
$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}$$

- El parámetro $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$ resulta

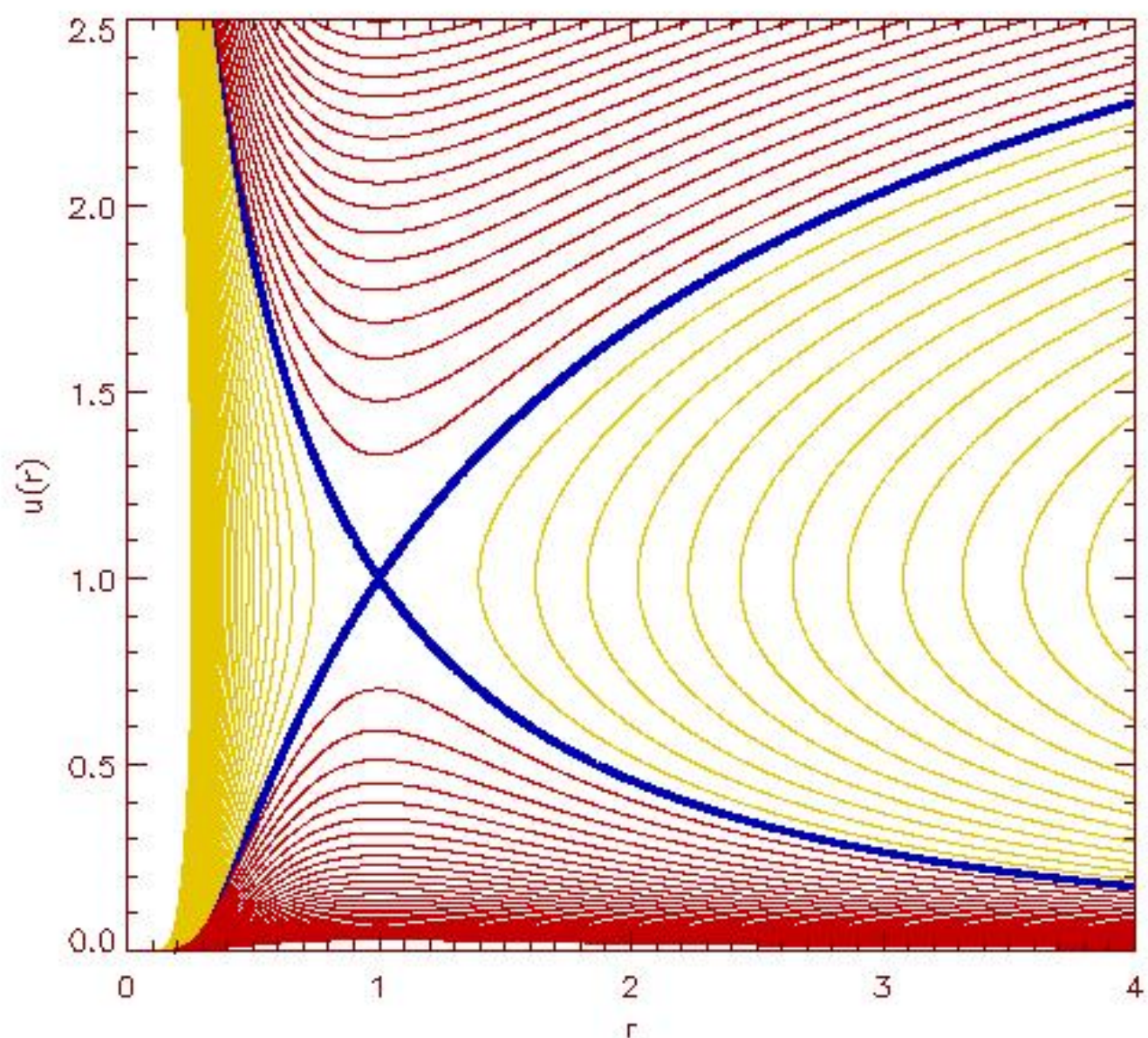
$$\beta = \beta_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma-4}$$

$$\gamma < 4/3 \rightarrow \beta < \beta_0$$

En este caso el rol de $\underline{B}$ es progresivamente importante en el colapso



Ecuaciones MHD — Viento solar

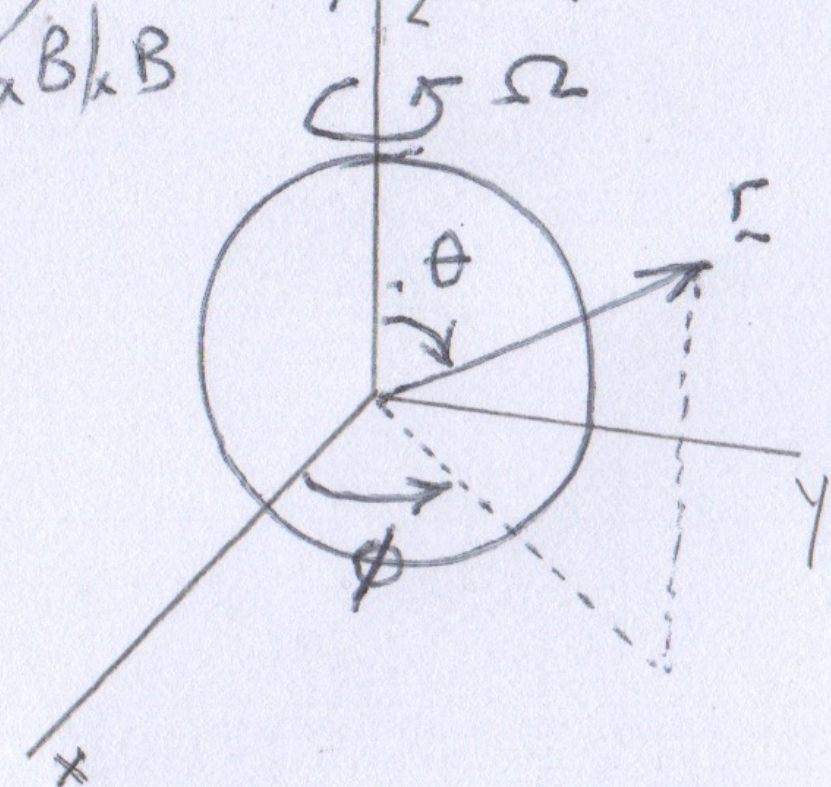


- Recordemos el modelo de Parker de viento solar con $u_r(r)$ superando la vel. del sonido en el punto crítico.

- Incorporaremos ahora el rol de $\underline{B}$ suponiendo

$$\frac{B^2}{8\pi} \ll \frac{\rho u^2}{2}$$

(viento solar superalfvénico)



- En un sistema co-rotante con el Sol:

$$u_r = u(r) \quad u_\theta = 0 \quad u_\phi = -\Omega r \sin \theta$$

- En el sistema co-rotante $\underline{u} \parallel \underline{B}$ y las líneas de $\underline{B}$ están congeladas a la superficie solar:

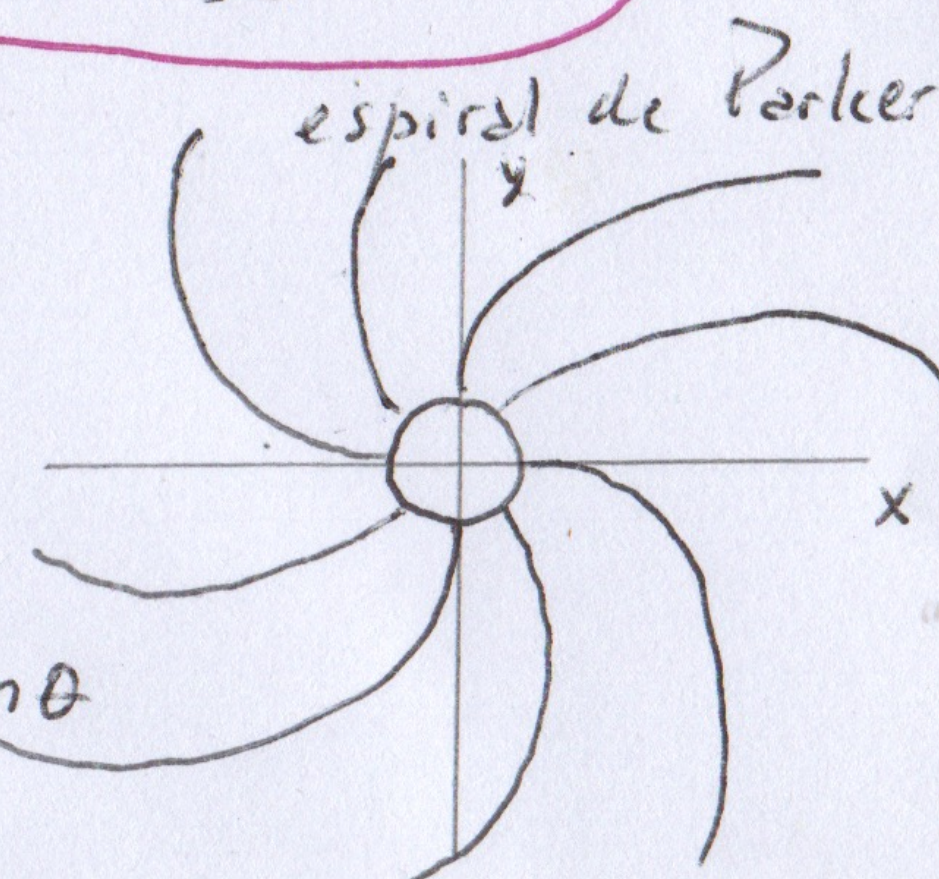
$$\frac{B_r}{B_\phi} = \frac{u_r}{u_\phi} = \frac{u(r)}{-\Omega r \sin \theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dr}{d\phi}$$

- Las líneas en el plano de la eclíptica ($\theta = \pi/2$) suponiendo $u(r) \approx \text{cte}$ (muy lejos del pto. crítico)

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{u}{\Omega r} \rightarrow r - r_0 = -\frac{u}{\Omega} (\phi - \phi_0)$$

- Usando $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

$$\underline{B}(r) = \begin{cases} B_r = B(r_0, \theta, \phi_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \\ B_\theta = 0 \\ B_\phi = -B(r_0, \theta, \phi_0) \frac{\Omega r_0^2 \sin \theta}{u r} \end{cases}$$



- Las ecs. MHD estacionarias son

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\rho (\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}$$

$$\partial_t \underline{B} - \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) = 0$$

- Es decir que $\underline{B} \parallel \underline{u}$

- El Sol rota con $\underline{\Omega}$.