Astrofísica - 1er Cuatrimestre 2022

Práctica 3: Relatividad

Problema 1. Los rayos cósmicos alcanzan energías del orden de 10^{20} eV.
(a) Considere el caso de un protón con esta energía. Calcule su factor de Lorentz y su velocidad. La masa del protón es $m_p = 938$ MeV/c^2.
(b) Si el disco de la Vía Láctea tiene un espesor de 100 pc, medido por un observador en la Tierra ¿cuánto mide en el sistema propio del protón? ¿Cuánto tiempo empleará el protón en atravesarlo? Haga el cálculo en ambos sistemas de referencia, y discuta los resultados.
(c) Considere ahora el caso de un neutrón. Sabiendo que la vida media del neutrón en su sistema propio es $\tau_n \sim 900$ s, calcule la distancia máxima a la que puede detectarse una fuente de neutrones, en función de la energía de los mismos. Suponga que la fuente puede detectarse si sobreviven (en promedio) al menos el 25 % de los neutrones. La masa del neutrón es $m_n = 939$ MeV/c^2.

Problema 2. Una burbuja de materia es eyectada por un microquasar a una velocidad v cuya dirección forma un ángulo $\pi - \theta$ con la visual, en el sistema de referencia del observador.
(a) Muestre que β^{ap}, la relación entre la velocidad aparente de la burbuja en el cielo y la velocidad de la luz c es

$$\beta^{ap} = \frac{\beta \operatorname{sen}\theta}{1 - \beta\cos\theta} \quad ,$$

donde $\beta = v/c$.
(b) Grafique β^{ap} en función de θ para β = 0,5, 0.7, 0.9, 0.99 y 0.999. Muestre que es posible obtener $\beta^{ap} > 1$ y discuta su significado ¿Qué condición debe cumplir β para que esto ocurra?
(c) Muestre que para un dado $\beta < 1$, β^{ap} tiene un máximo en $\cos\theta_{max} = \beta$. Obtenga la dependencia de $\beta^{ap}(\theta_{max})$ con β e interprete a qué situación física corresponde.

Problema 3. Considere la dispersión elástica de un fotón por un electrón libre, $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.
(a) Si el electrón está inicialmente en reposo, el fotón le transfiere energía y momento al electrón (*efecto Compton*). Deduzca la ecuación que relaciona las frecuencias ν y ν' de los fotones incidente y dispersado respectivamente,

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta) \quad ,$$

donde θ es el ángulo entre las direcciones de propagación de ambos fotones, c la velocidad de la luz, h la constante de Planck y m_e la masa del electrón.
(b) Si ahora la energía del electrón es $E_e \gg h\nu$, el electrón transfiere energía y momento al fotón, y el proceso se denomina *Compton inverso*. En el sistema de referencia en que el electrón se encuentra inicialmente en reposo, el proceso es idéntico al anterior. Deduzca la ecuación que relaciona las frecuencias de los fotones incidente y dispersado (en el sistema de referencia del observador) para el efecto Compton inverso.
(c) Muestre que en el efecto Compton inverso, la energía máxima del fotón dispersado es $h\nu'_{max} \sim 4\Gamma^2 h\nu$, donde Γ es el factor de Lorentz del electrón. Describa claramente cuál es el origen de este aumento de energía.

Problema 4. Cuando un fotón se propaga en un campo gravitatorio débil, su energía E varía según

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{\Delta \Phi}{c^2} \quad ,$$

donde ΔE es la variación de energía del fotón correspondiente a una diferencia de potencial gravitatorio $\Delta\Phi$, y c es la velocidad de la luz. Calcule el corrimiento al rojo gravitatorio medido por un observador en la Tierra, para un fotón que es emitido desde la superficie de una enana blanca con $M = 1M_\odot$ y $R = 10^4$ km. ¿Qué velocidad debería tener la estrella respecto de la Tierra para que el corrimiento al rojo Doppler tuviera la misma magnitud que el corrimiento al rojo gravitatorio?

Problemas adicionales

Problema 5. (a) Discuta las diferencias entre la ecuación del efecto Doppler relativista,

$$\nu^{obs} = \nu^f (1 - \beta \cos\theta)\gamma \quad ,$$

y la del efecto Doppler clásico,

$$\nu^{obs} = \nu^f (1 - \beta \cos\theta) \quad ,$$

donde ν^{obs} y ν^f son las frecuencias del fotón en el sistema de referencia del observador y la fuente respectivamente, β la razón entre la velocidad de la fuente en el sistema del observador y la velocidad de la luz, θ el ángulo que forma la primera con la visual, y γ el correspondiente factor de Lorentz.
(b) Muestre que para cualquier valor del corrimiento al rojo $z = (\lambda^{obs} - \lambda^{em})/\lambda^{em}$ $(\lambda = c/\nu)$, resulta $\beta < 1$. Si existieran velocidades superlumínicas ¿sería posible detectarlas usando el efecto Doppler?
(c) Calcule, con ambas expresiones, la velocidad de una fuente con corrimiento al rojo z, para los casos $z = 0{,}01$, 0.1, 1 y 10.

Problema 6. En el ejercicio 2 se enunció que la luz emitida por un objeto desplazándose a una velocidad v respecto de un observador, en una dirección que forme un ángulo $\pi - \theta$ con la visual del observador, presenta una velocidad aparente v^{ap} en el plano del cielo dada por

$$\beta^{ap} = \frac{v^{ap}}{c} = \frac{\beta \operatorname{sen}\theta}{1 - \beta\cos\theta} \quad .$$

Si se conoce la distancia al objeto, puede medirse β^{ap}, pero ello no es suficiente para determinar la velocidad v ni el ángulo θ.
Si para una línea espectral de frecuencia propia ν_0 emitida por el objeto se mide una frecuencia ν_{obs}, usando la expresión correspondiente de efecto Doppler, muestre que es posible ahora hallar v y θ en términos de los datos surgidos de la observación. Obtenga los valores de β y θ si $\beta^{ap} = 2$ y $\nu_{obs} = \nu_0/2$.

Problema 7. (a) Un pión ($m_\pi = 139$ MeV/c^2) decae en un muón ($m_\mu = 106$ MeV/c^2) y un neutrino muónico ($m_\nu \sim 0$), $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Si el pión se encuentra en reposo, calcule la energía que se lleva el neutrino. Si ahora el pión tiene una energía de 10 GeV, calcule la energía máxima y mínima del muón.
(b) ¿Cuál es la energía mínima que debe tener el fotón (en el sistema del observador) para que la reacción $p + \gamma \to n + \pi^+$ sea posible? Suponga que el protón se encuentra inicialmente en reposo en dicho sistema.

Problema 8. En un gas de Fermi, la presión P puede hallarse mediante

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 \frac{d\epsilon}{dp}\, dp \quad ,$$

donde p y ϵ son el momento y la energía de una partícula, h la constante de Planck, y p_F es el momento de Fermi. La densidad del gas n viene dada por

$$n = \frac{8\pi}{3h^3}\, p_F^3 \quad .$$

Halle la ecuación de estado del gas de Fermi en los casos no relativista ($\epsilon = p^2/(2m)$, con m la masa de las partículas) y ultrarrelativista ($\epsilon = pc$).