Clase anterior

- Diagrama de Hertzsprung-Russell: brillo vs color o luminosidad vs temperatura

- Ley de Stefan-Boltzmann

- Secuencia principal, gigantes, supergigantes, enanas blancas

- Enanas marrones: las estrellas mas chicas o los planetas mas grandes

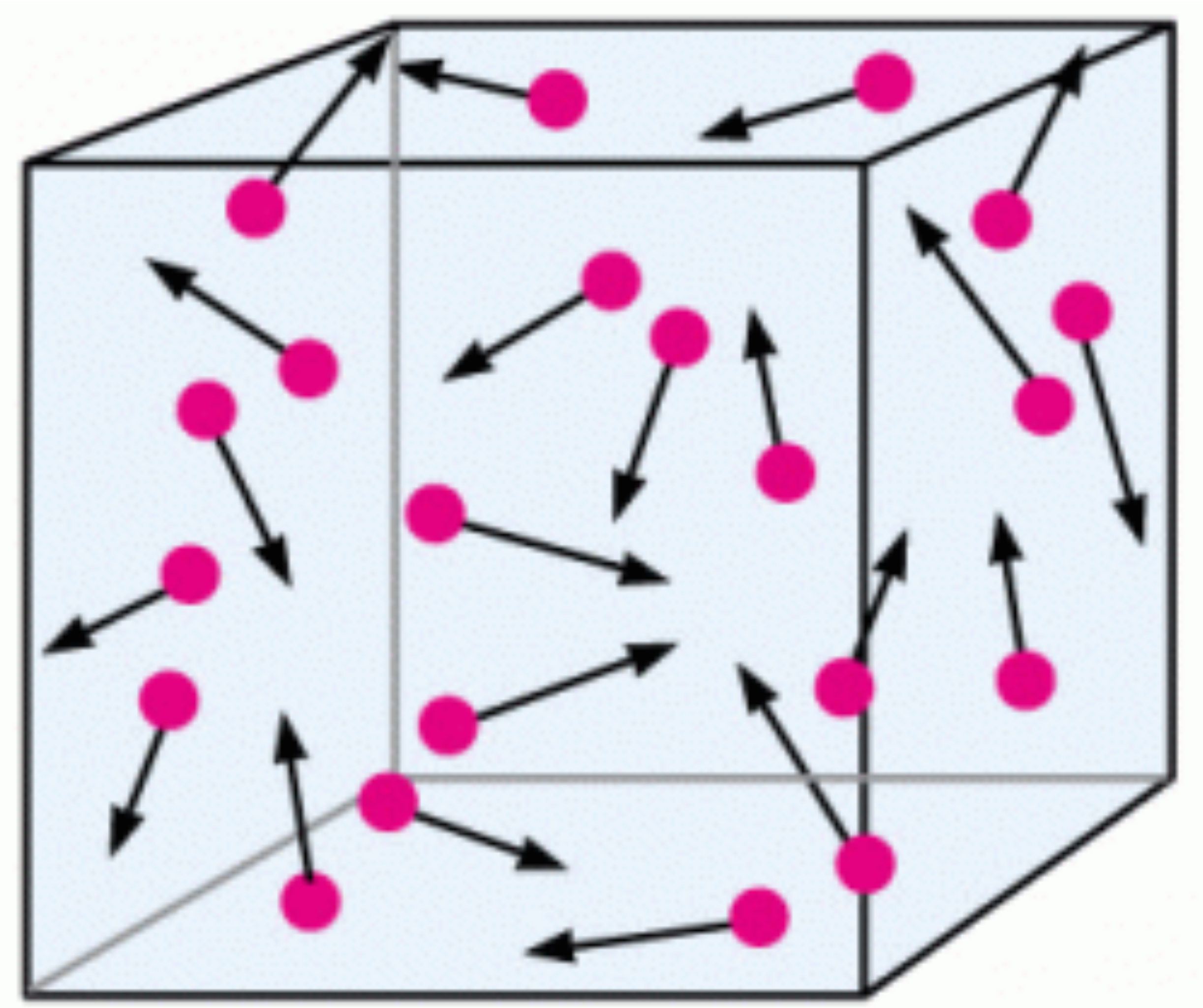
- Sistemas binarios: visuales, eclipsantes, espectroscópicas

- Galaxias: espirales, barradas e irregulares

- Evolución estelar: trayectorias evolutivas

Teoría cinética

Para describir la dinámica de la materia, recurrimos a la descripción cinética de un gran número de partículas indistinguibles.



$f^s_{(\underline{r},\underline{p},t)}$ es la función de distr. de part. de especie s y $d^3r\, d^3p\, f^s(\underline{r},\underline{p},t)$ es el número de ellas en entorno d^3r de $\underline{r}$ y con impulsos en un entorno d^3p de $\underline{p}$ al instante t.

La densidad de part. es

$$n^s_{(\underline{r},t)} = \int d^3p\, f^s(\underline{r},\underline{p},t)$$

y la densidad de masa y carga

$$\rho^s(\underline{r},t) = m_s\, n^s(\underline{r},t) \qquad \rho(\underline{r},t) = \sum_s \rho^s(\underline{r},t)$$

$$\rho^s_c(\underline{r},t) = q_s\, n^s(\underline{r},t) \qquad \rho_c(\underline{r},t) = \sum_s \rho^s_c(\underline{r},t)$$

La vel. media:

$$\underline{u}^s(\underline{r},t) = \frac{1}{n^s(\underline{r},t)} \int d^3p\, \underline{v}\, f^s(\underline{r},\underline{p},t) \qquad \underline{v} = \frac{\underline{p}}{m_s}$$

La vel. cuadrática media (en el referencial $\underline{u}^s$) la usamos para definir la temperatura $T^s_{(\underline{r},t)}$:

$$\frac{3}{2} k_B T^s_{(\underline{r},t)} = \frac{m_s}{2}\langle |\underline{v}-\underline{u}^s|^2 \rangle = \frac{m_s}{2n^s}\int d^3p\, |\underline{v}-\underline{u}^s|^2 f^s(\underline{r},\underline{p},t)$$

donde hemos definido el valor medio $\langle \cdots \rangle$ e introducido la constante de Boltzmann $k_B = 1.38\cdot 10^{-16}\, \frac{erg}{K}$

El momento de órden 0 de f^s es n^s, el momento de órden 1 es $\underline{u}^s$. El momento de órden 2 es el tensor de presiones:

$$P^s_{ij}(\underline{r},t) = m_s \int d^3p\, (v_i - u^s_i)(v_j - u^s_j)\, f^s(\underline{r},\underline{p},t)$$

En equilibrio termodinámico, este tensor se vuelve isótropo, es decir:

$$P^s_{ij} = p^s \delta_{ij} \xrightarrow[\text{traza}]{\text{tomo la}} 3p^s = m_s n^s \langle |\underline{v}-\underline{u}^s|^2 \rangle$$

Entonces: $p^s = n^s k_B T^s$ (gas ideal)

Puede seguirse definiendo momentos de órdenes mas altos. Por ejemplo el momento de órden 3 se vincula con el flujo de calor:

$$\underline{q}^s = \frac{m_s n^s}{2}\langle |\underline{v}-\underline{u}^s|^2 (\underline{v}-\underline{u}^s)\rangle$$

Hasta aquí son solo definiciones de momentos. Falta lo mas importante: de que manera obtengo la función de distribución $f^s(\underline{r},\underline{p},t)$ para cada especie s ?

Ecuación de Boltzmann

En ausencia de colisiones, entre t y $t+dt$

$$(\underline{r}, \underline{p}, t) \xrightarrow[dt]{} \left(\underline{r} + \frac{\underline{p}}{m} dt,\ \underline{p} + \underline{F} dt,\ t+dt\right)$$

El número de part. en $d^3r\, d^3p$ se conserva

$$d^3r\, d^3p\, f(\underline{r}, \underline{p}, t) \longrightarrow d^3r'\, d^3p'\, f\left(\underline{r} + \frac{\underline{p}}{m} dt,\ \underline{p} + \underline{F} dt,\ t+dt\right)$$

Para sistemas hamiltonianos, el volumen en el espacio de fases es invariante (teorema de Liouville)

$$d^3r'\, d^3p' = d^3r\, d^3p \qquad \text{(invariante de Poincaré)}$$

Entonces, desarrollando Taylor en dt:

$$\cancel{f} + dt \frac{\partial f}{\partial t} + dt \frac{\underline{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} + dt\, \underline{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} = \cancel{f}$$

$$\therefore \quad \boxed{\partial_t f + \frac{\underline{p}}{m} \cdot \underline{\nabla} f + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p f = 0}$$

Esta es la llamada <u>ecuación de Vlasov</u>, una ecuación cinética en derivadas parciales con 7 variables para $f(\underline{r}, \underline{p}, t)$.

En esta ecuación las partículas se mueven (sin colisionar entre ellas) bajo la acción de fuerzas de largo alcance $\underset{\sim}{F}$. Para gases diluidos, se consideran colisiones cuando dos partículas (s: proyectil y s_1: blanco) coexisten en $(\underline{r}, t)$.

La ec. Boltzmann da cuenta del efecto de colisiones binarias:

$$\boxed{\partial_t f^s + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} f^s + \underline{F} \cdot \nabla_p f^s = \sum_{s_1} \int d^3p_1 \int d\Omega\, \sigma_{ss_1}(\Omega) \cdot |\underline{v} - \underline{v}_1| \left(f'_s f'_{s_1} - f_s f_{s_1}\right)}$$

Ec. Boltzmann

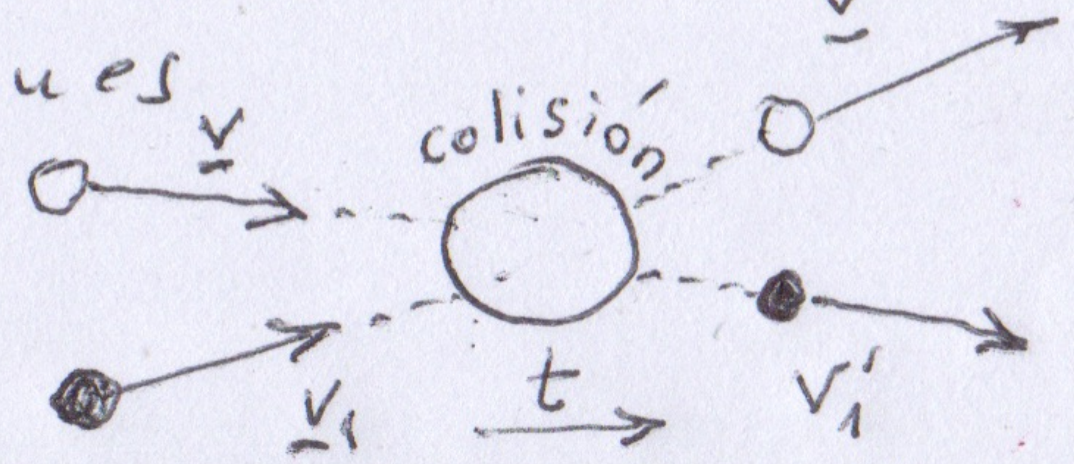
s: proyectil

s_1: blanco

$d\Omega\, \sigma(\Omega)$: sección eficaz diferencial

$d\Omega = d\varphi\, d\theta \sin\theta$: dif. ángulo sólido

f: antes $\qquad f'$: despues



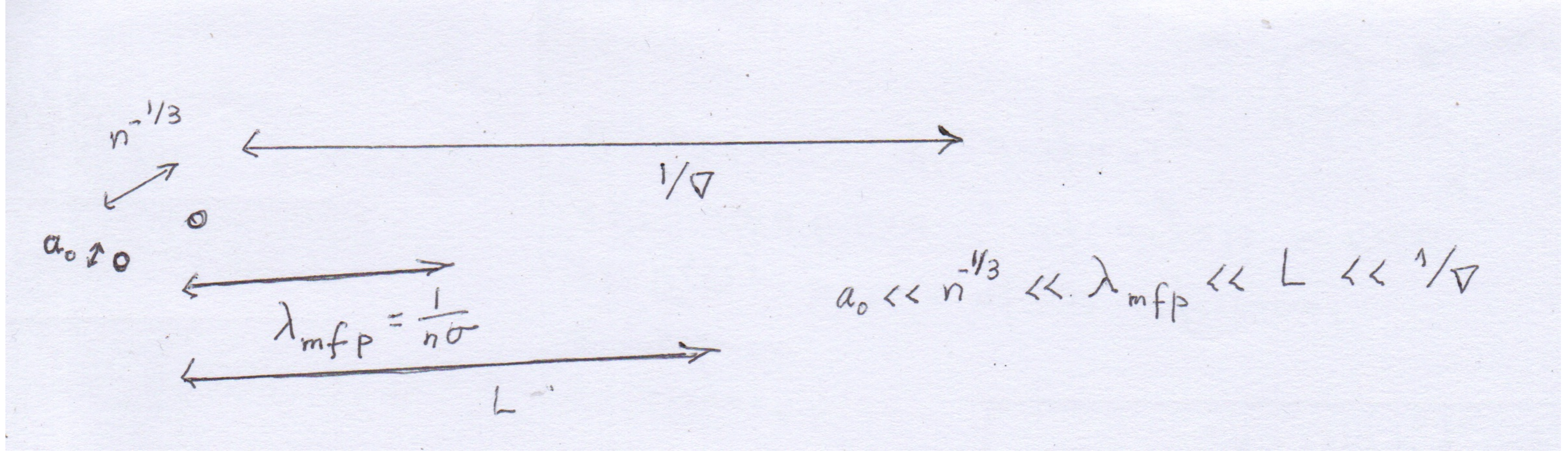
Distribución de Maxwell-Boltzmann

- Nos han enseñado que un gas clásico relaja por colisiones a una distribución maxwelliana. Entonces, esta distribución debería ser una solución de la ecuación de Boltzmann.
- En ausencia de fuerzas de largo alcance $\underline{F}$ se tiene un equilibrio estacionario y homogeneo, que anula el lado izquierdo de la ecuación.
- Para anular el término colisional: $f \,.\, f_1 = f' \,.\, f'_1$
- Como en colisiones elásticas se conservan el impulso y la energía cinética, entonces $\log f = C_0 + \underline{C}_1 \cdot \underline{v} + C_2 v^2$
- Las cinco constantes se pueden obtener en términos de los primeros momentos n, $\underline{u}$ y T : $f(\underline{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m|\underline{v}-\underline{u}|^2}{2k_B T}\right)$
- Con esto probamos que la maxwelliana es una solución de equilibrio, pero no que desde cualquier estado inicial se relaja a ella.

Teorema H de Boltzmann

Definimos H($\underline{r}$, t) como $H = \int d^3p\, f \;\log f$. Si f evoluciona a través de la ecuación de Boltzmann en ausencia de gradientes y fuerzas externas, entonces: (a) $\frac{dH}{dt} \leq 0$; (b) si $f = f_{MB}$ entonces $\frac{dH}{dt} = 0$.

- Un corolario inmediato del teorema es que desde cualquier estado inicial H disminuye hasta valer cero al alcanzar la maxwelliana.
- Se supone el siguiente ordenamiento de longitudes caracteristicas:



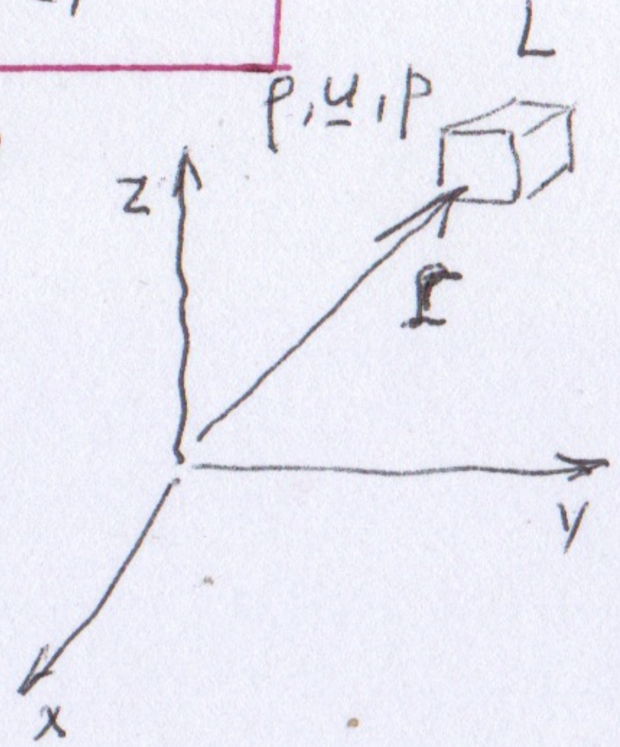
Descripción hidrodinámica

- A escalas mucho mayores que el camino libre medio, la **hidrodinámica** provee una descripción adecuada del movimiento de la materia.
- Las ecuaciones HD corresponden a los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann. Para interpretar estas ecuaciones, se recurre a la noción de **elemento de fluído**, que es suficientemente grande como para contener muchas partículas y a la vez mucho mas pequeño que las longitudes de interés (la longitud L del diagrama anterior).

Ecuación de continuidad

$$\int d^3p\; m\,(\text{Boltzmann}) \longrightarrow \boxed{\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho \mathbf{u}) = 0}$$

donde $\rho = mn$: densidad de masa



Noten que la masa del sistema no cambia por colisiones y por lo tanto el término colisional no aporta.

Ecuación de movimiento

$$\int d^3p\; \mathbf{p}\,(\text{Boltzmann}) \rightarrow \boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\cdot \underline{\underline{P}} + n\mathbf{F}}$$

donde hemos introducido la notación

$$\underset{(\text{total})}{\frac{dA}{dt}} = \underset{(\text{parcial})}{\frac{\partial A}{\partial t}} + \underset{(\text{convectiva})}{\mathbf{u}\cdot\nabla A}$$

$\frac{d}{dt}$: referencial del fluido

$\frac{\partial}{\partial t}$: referencial del labo

Ecuación de energía

$$\int d^3p\; \frac{mv^2}{2}(\text{Boltzmann}) \rightarrow \boxed{\frac{3}{2} n k_B \frac{dT}{dt} = -\nabla\cdot \mathbf{q} - \underline{\underline{P}} : \nabla \mathbf{u}}$$

Estas ecuaciones requieren condiciones de clausura.

Aproximación de fluido ideal

$$\underline{\underline{P}} = p\,\underline{\underline{1}}$$

$$\mathbf{q} = 0$$

Flujo incompresible

La ec. continuidad puede escribirse $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\,\nabla\cdot\mathbf{u}$

Incompresible si $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (ρ permanece constante en el referencial del fluido)

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho \longleftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

Teorema del virial

- Para estrellas u objetos esféricos cohesionados gravitatoriamente, se propone un equilibrio estático ($\underline{u}$ = 0) entre la fuerza gravitatoria (atractiva) y la fuerza de presión (repulsiva).

- Esto presupone que las energías térmica y gravitatoria deben resultar comparables.

En esféricas:

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} - \rho \frac{GM_r}{r^2}\hat{r}$$

donde $M_r = \int_0^r dr\, 4\pi r^2 \rho(r)$ es la masa contenida en esfera de radio r

$$\therefore \quad \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

Si multiplicamos por $4\pi r^3$ e integramos en toda la estrella de radio R:

$$\int_0^R dr\, 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} = \int_0^R dr\, 4\pi r^3 \left(-\rho \frac{GM_r}{r^2}\right)$$

Integrando el lado izquierdo por partes ($y\, p(R) = 0$)

$$-\int_0^R dr\, 4\pi r^2 (3p) = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \left(-\frac{\rho G M_r}{r}\right) \quad (*)$$

donde $E_G = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \left(-\frac{GM_r \rho}{r}\right)$: energía gravitatoria

- Para un gas ideal $p = n k_B T$
- $\frac{3}{2} k_B T$ es la energía térmica por partícula de un gas monoatómico. Entonces la energía térmica es

$$E_T = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \left(\frac{3}{2} n k_B T\right)$$

La ecuación (*) resulta:

$$-2E_T = E_G \longrightarrow \boxed{2E_T + E_G = 0}$$

Teorema del virial

Noten que $E_G \le 0$, entonces

$$E_T = -\frac{1}{2} E_G = \frac{1}{2}|E_G|$$

y la energía total del sistema resulta

$$E = E_T + E_G = \frac{E_G}{2} = -\frac{1}{2}|E_G| \le 0$$

Equilibrio hidrostático

- Como primera aplicación, veamos dos tipos de equilibrios hidrostáticos ($\underline{u} = 0$).
- Caso a: fluído incompresible (agua —> océanos). Caso b: fluído ideal isotérmico (aire —> atmósfera).

Caso a $(z \leq 0)$

$\rho_0 = cte$ (incompresible)

$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g$

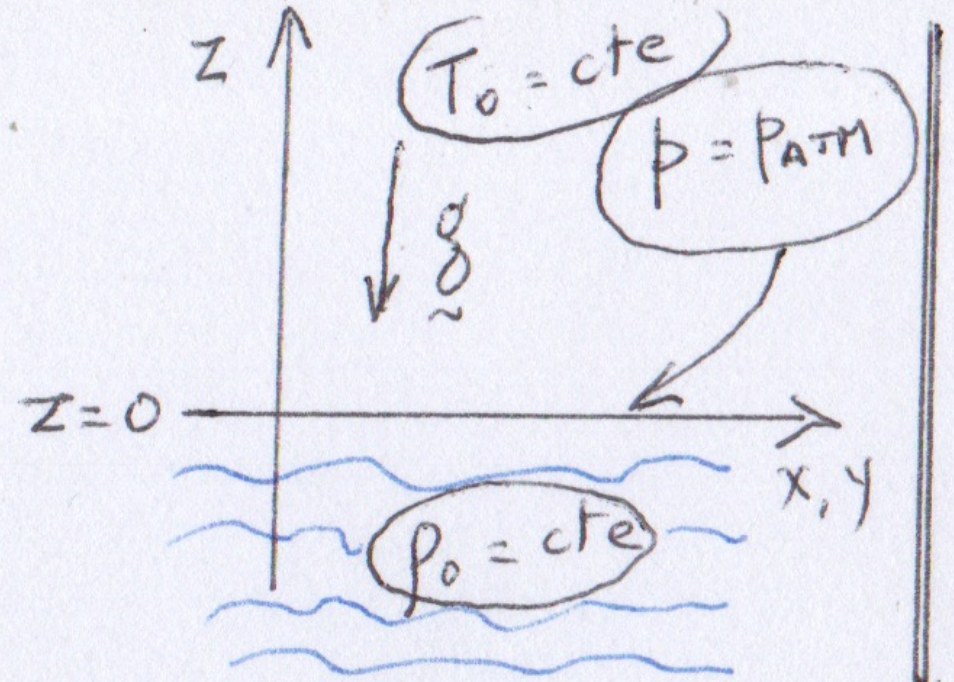
$\hat{x}, \hat{y}: \quad 0 = -\underline{\nabla}_\perp p \longrightarrow p = p(z)$

$\therefore \quad p = -\rho_0 g z + cte$

Para determinar la cte de integración, usamos que en la superficie tenemos equilibrio con la atmosfera:

$p(z=0) = p_{ATM} \longrightarrow p(z) = p_{ATM} - \rho_0 g z$

Es decir que la presión crece linealmente con la profundidad $(-z)$.



Caso b $(z \geq 0)$

El aire no es incompresible, pero podemos suponer un gas ideal isotérmico

$p = \rho \frac{k_B T_0}{m}$ m: masa molecular media del aire

$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g$

$\rho = \frac{m}{k_B T_0} p \longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{k_B T_0} dz = -\frac{dz}{H}$

$H = \frac{k_B T_0}{m g}$: escala de alturas

$\therefore \quad p(z) = p_{ATM} \, e^{-z/H}$ $\quad \rho(z) = \frac{m \, p_{ATM}}{k_B T_0} e^{-z/H}$

La presión y densidad de la atmósfera decrecen exponencialmente en alturas del orden de $H = \frac{k_B T_0}{m g}$

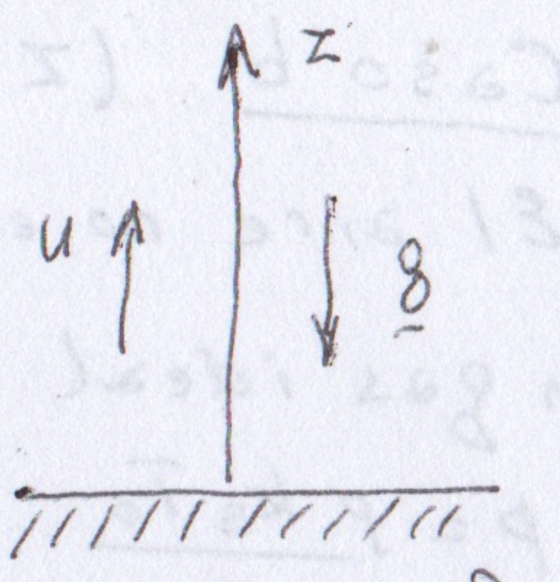
Atmósfera convectiva

- Supongamos ahora una atmósfera en estado estacionario con flujos solo en la dirección vertical.
- El movimiento vertical conlleva una forma de transporte de energía llamado convectivo.

Ec. cont.: $\partial_z (n u) = 0$

Ec. mov.: $p(z) \simeq p_0 \, e^{-z/H}$

(para flujos subsónicos $\rho \frac{du_z}{dt} \ll \partial_z p$)



$\partial_t = 0 = \partial_x = \partial_y$

Ec. energía: $\frac{3}{2} n k_B u \frac{\partial T}{\partial z} = -p \frac{\partial u}{\partial z}$

(sup. $\underset{\sim}{q} \cong 0$)

Ec. estado: $p = n k_B T$

Entonces:

$$\frac{u'}{u} + \frac{n'}{n} = 0$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} + \frac{T'}{T} = -\frac{1}{H}$$

$$\frac{3}{2} n k_B \cancel{u} T' + p \cancel{u} \left(\frac{1}{H} + \frac{T'}{T}\right) = 0$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2mg}{5k_B} = -\frac{g}{c_p}$$

En el referencial del fluido

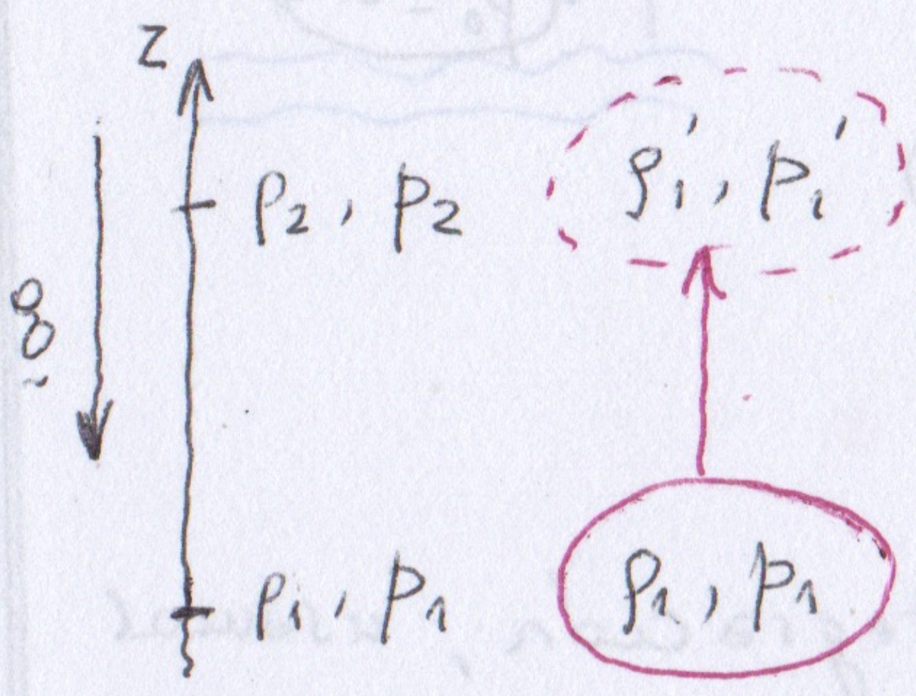
$$\frac{dT}{dt} = u \frac{dT}{dz} = -\frac{g u}{c_p}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{g u}{c_p}$$

$u > 0$ (ascenso) $\longrightarrow \frac{dT}{dt} < 0$ (se enfría)

$u < 0$ (descenso) $\longrightarrow \frac{dT}{dt} > 0$ (calienta)

CRITERIO DE SCHARZSCHILD



- Supongamos que una gota con (ρ_1, p_1) asciende a una zona con (ρ_2, p_2) tomando valores (ρ_1', p_1').
- Sup. que inmediatamente alcanza balance de presión $p_1' = p_2$
- Sup. que asciende adiabaticamente $\rho_1' = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}$

El criterio de Scharzschild establece

$\rho_1' > \rho_2 \longrightarrow$ estable (peso > empuje)

$\rho_1' < \rho_2 \longrightarrow$ inestable (peso < empuje)

En el segundo caso se pone en marcha una *inestabilidad convectiva*.