Clase anterior

- Repaso del modelo estático de Stromgren para un frente de ionización.

- Formación de ondas de choque hidrodinámicas.

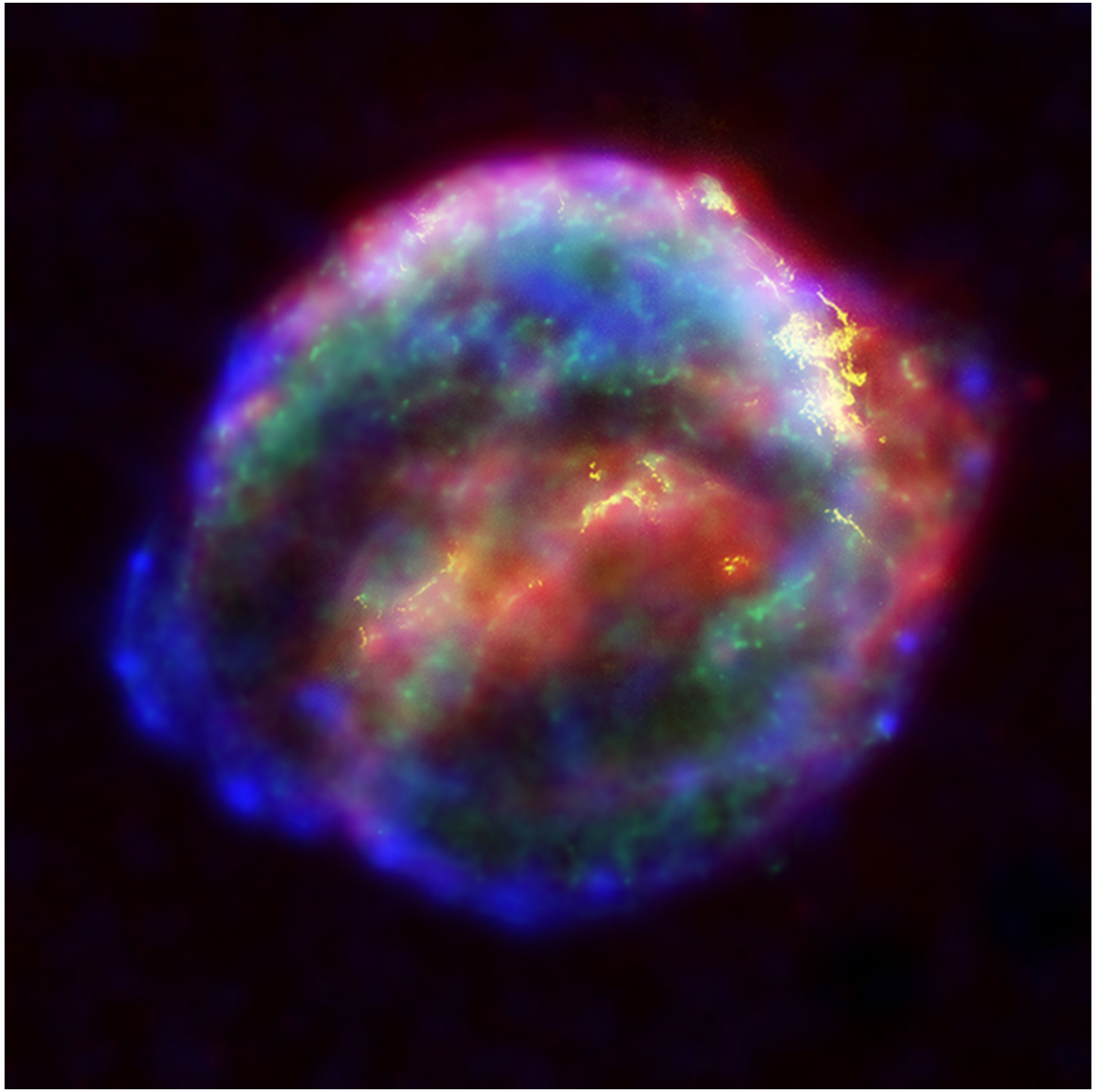
- Repaso de condiciones de Rankine-Hugoniot.

- Condiciones de R-H con ionización.

- Soluciones tenue y densa.

Supernovas

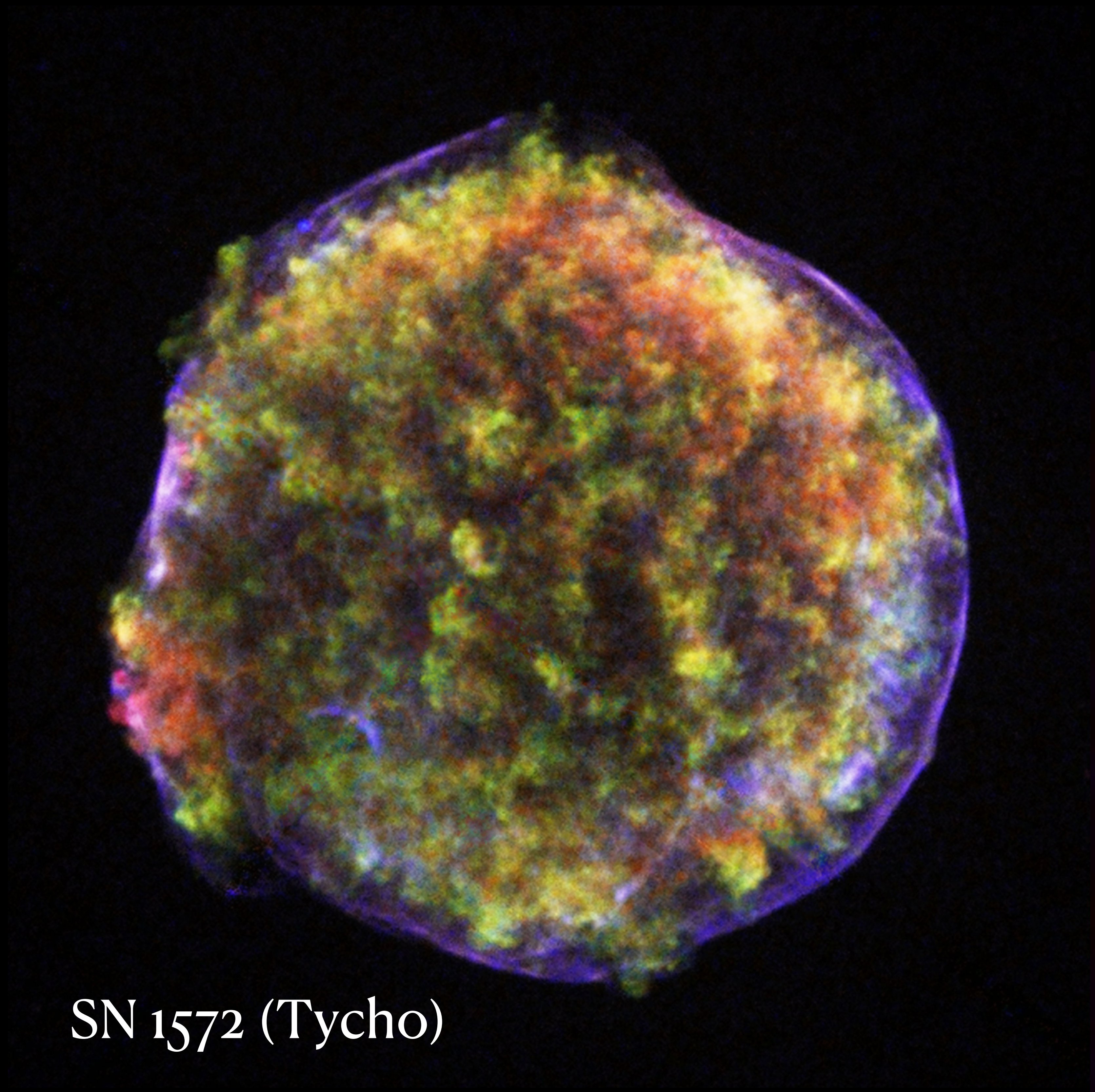
- La explosión de una estrella como **supernova** en las etapas finales de su evolución es un fenómeno muy espectacular.
- Corresponde a la liberación impulsiva de 10^{51}-10^{52} erg en un medio interestelar relativamente homogeneo y de baja densidad.
- La explosión puede originarse por al menos dos escenarios diferentes:
    1. **Tipo I**: sin H en su espectro. Una enana blanca que recibe masa de una compañera, hasta superar una masa límite (masa de Chandrasekhar).
    2. **Tipo II**: lineas de H. Una estrella de mas de 8 masas solares agota el combustible en su nucleo.
- Una vez ocurrida la explosión, se produce un frente de choque esférico que se expande supersonicamente.
- La evolución de esa expansión fue modelada por soluciones auto-similares, tanto por L.I. Sedov (1949, ex-URSS) como por G.I. Taylor (1950, UK).
- Noten que este es el mismo problema que una explosión nuclear en la asmósfera terrestre. Ver las fechas de las publicaciones.



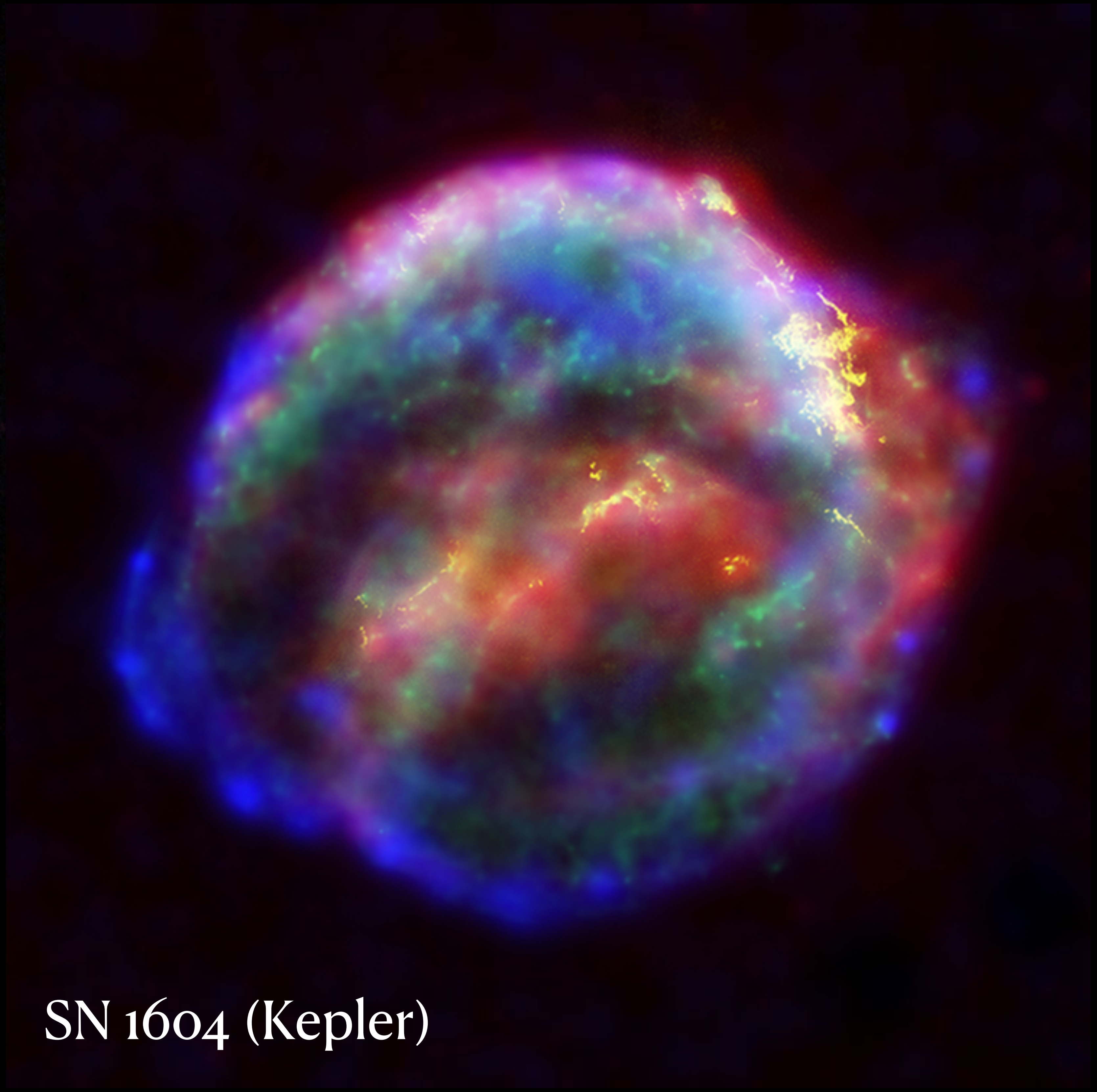
Supernova Kepler que explotó en nuestra galaxia en 1604.

Supernovas históricas

SN 1006



SN 1572 (Tycho)



SN 1604 (Kepler)

Solución autosimilar: Etapa I

- Supongamos tener inicialmente una masa M_* y una energía E_* concentradas en un punto.
- El medio interestelar circundante tiene una densidad de masa uniforme ρ_∞ .
- Queremos obtener el radio del frente de choque en función del tiempo y de los parámetros anteriores. Es decir:

$$R = R\ (\ t,\ E_*,\ M_*,\ \rho_\infty\ )$$

- Para aplicar el teorema Pi de Buckingham tenemos n=4 dependencias (t, E_*, M_*, ρ_0) para nuestra incógnita R. Todas estas cantidades se expresan en términos de k=3 unidades independientes (M, L, T).
- Según el teorema, podemos expresar la ley anterior en términos de n-k+1=2 números adimensionales: $\pi_1 = F(\pi_2)$
- **Etapa I** : Pensemos una primera etapa en la cual la densidad del medio interestelar no resulte importante, como si se expandiera contra vacío, es decir

$$R = R\ (\ t,\ E_*,\ M_*\ )$$

- Ahora n=3 y por lo tanto n-k+1=1. Es decir que podemos construir un único número adimensional $\pi = \dfrac{E_* t^2}{M_* R^2} = cte$
- Entonces

$$\boxed{R(t) \simeq (\frac{E_*}{M_*})^{1/2} t}$$

que corresponde a una expansión a v = cte en la cual se conserva la energía de la estrella.

Solución autosimilar: Etapa II

- Durante la expansión, el frente de choque va barriendo el material interestelar. Si bien es de baja densidad, la masa barrida acumulada eventualmente se vuelve comparable a la masa M_* . Eso ocurrirá en un instante t_1 tal que

$$M_* = \frac{4}{3}\pi R^3(t_1)\ \rho_\infty = \frac{4\pi}{3}(\frac{E_*}{M_*})^{3/2} t_1^3 \rho_\infty$$

- **Etapa 2**: Supongamos entonces una segunda etapa de la expansión para $t > t_1$ en la cual

$$R = R\ (\ t,\ E_*,\ \rho_\infty\ )$$

- Nuevamente n=3 y n-k+1=1 y tenemos un único número adimensional, del cual se deduce que

$$R \simeq E_*^a\ \rho_\infty^b\ t^c$$

donde los exponentes surgen univocamente de compatibilizar las unidades. Es decir

$$L = (\frac{ML^2}{T^2})^a\ (\frac{M}{L^3})^b\ T^c$$

- Se obtiene inmediatamente que a = 1/5 , b = - 1/5 y c = 2/5 y por lo tanto

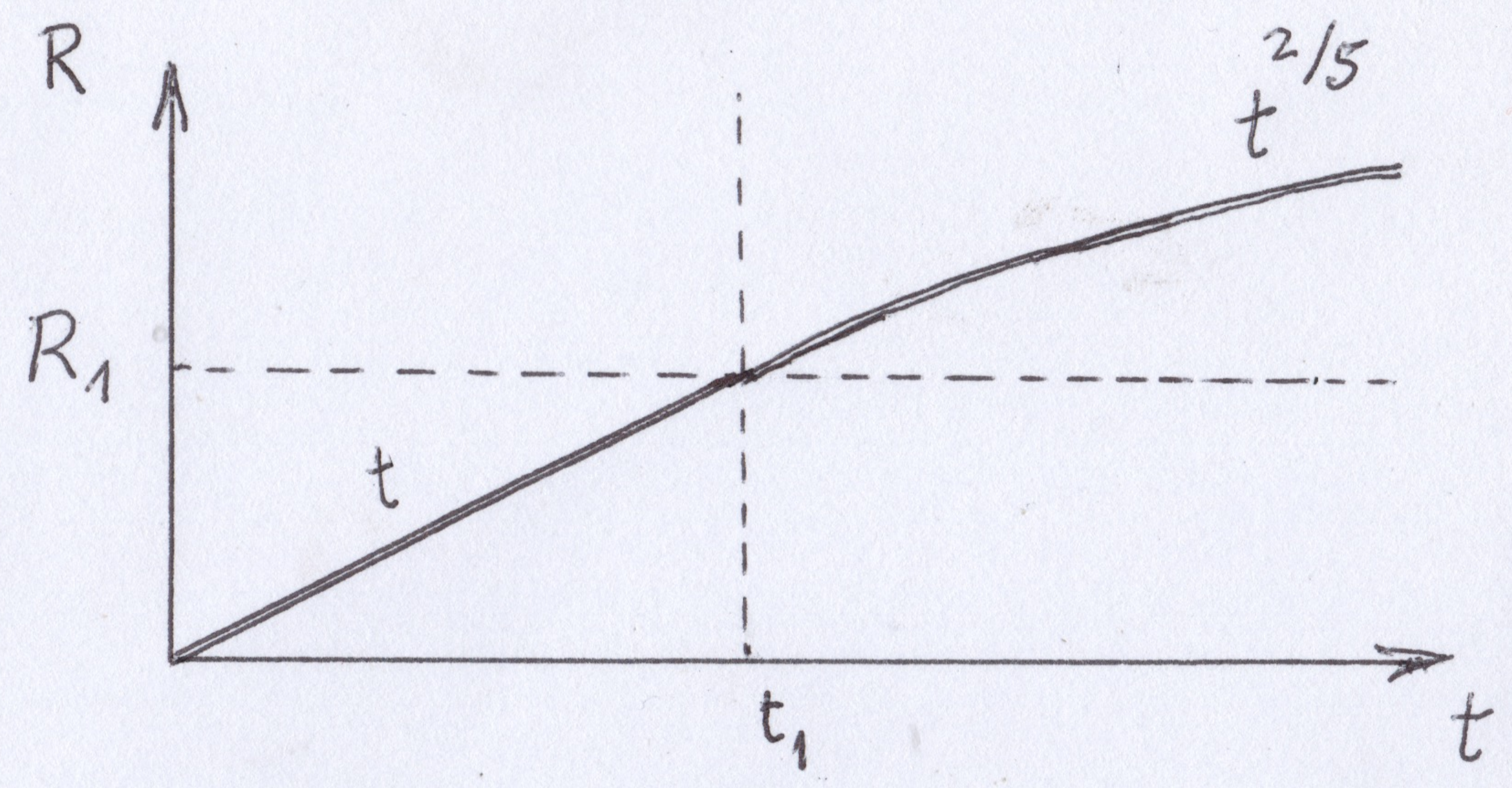
$$\boxed{R(t) \simeq (\frac{E_*\ t^2}{\rho_\infty})^{1/5}}$$

Solución autosimilar

En síntesis:

Etapa I ($t < t_1$)

$$t_1 \sim \frac{M_*^{5/6}}{E_*^{1/2}\,\rho_\infty^{1/3}} \qquad R_1 \sim \left(\frac{M_*}{\rho_\infty}\right)^{1/3}$$

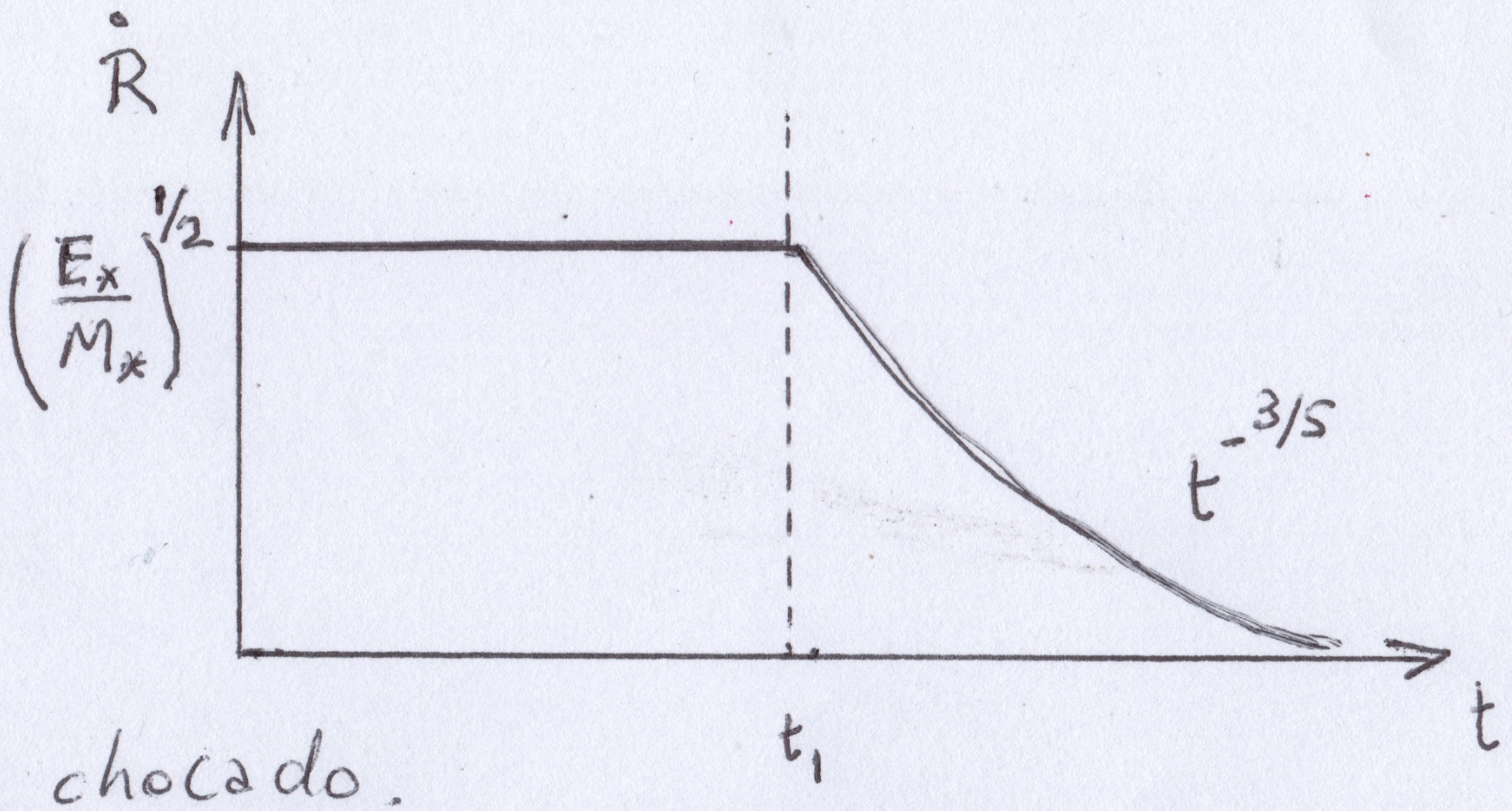


$$R(t) \sim \left(\frac{E_*}{M_*}\right)^{1/2} t \qquad \dot{R} \sim \left(\frac{E_*}{M_*}\right)^{1/2} = cte$$

- El cambio de régimen se da para $R \sim R_1$, que depende solo de la masa de la estrella y la densidad del medio.
- La esfera de radio R_1 contiene la misma masa (interestelar) que la estrella.

Etapa II ($t > t_1$)

$$R(t) \sim \left(\frac{E_* t^2}{\rho_\infty}\right)^{1/5} \qquad \dot{R} \sim \left(\frac{E_*}{\rho_\infty t^3}\right)^{1/5}$$



- En etapas mas tardías debe considerarse el enfriamiento radiativo del material interestelar chocado.

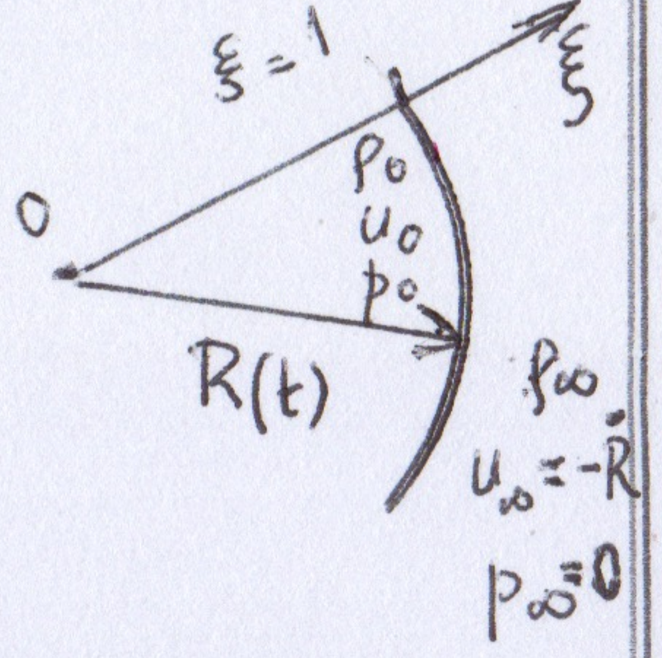
Modelo de Sedov-Taylor

- Por ahora solo tenemos la expresión para la evolución del frente de choque

$$R(t) = R_0 \left(\frac{E_* t^2}{\rho_\infty} \right)^{1/5}$$

- Queremos conocer $\rho(r,t)$, $u(r,t)$ y $p(r,t)$ en todo el fluido (ver Fluid Mechanics, Landau & Lifshitz, cap 10)

- Los valores ρ_0, u_0, p_0 justo dentro del choque, se obtienen por R-H



$$\rho_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_\infty = 4\rho_\infty$$

$$u_0 = \frac{u_\infty}{4} = -\frac{\dot R}{4} \longrightarrow u_0 = -\frac{\dot R}{4} + \dot R = \frac{3}{4}\dot R$$

transf. Galileo al ref. de la estrella

$$p_0 = \frac{3}{4}\rho_\infty u_\infty^2$$

Estos son los valores en el contorno interno.

- Proponemos soluciones autosimilares en (r,t) dadas por

$$\rho(r,t) = \rho_0\, \rho(\xi) \qquad \xi = \frac{r}{R(t)} \qquad 0 \le \xi \le 1$$

$$u(r,t) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2r}{5t}\, u(\xi)$$

$$c^2(r,t) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4r^2}{25t^2}\, c^2(\xi) \qquad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

(Noten que $\frac{2}{5}\frac{r}{t} = \dot R$ en $\xi = 1$)

- Reemplazamos estas expresiones en las ecuaciones de fluidos con simetría esférica

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r^2}\partial_r (r^2 \rho u) = 0$$

$$\partial_t u + u\,\partial_r u = -\frac{1}{\rho}\partial_r p$$

$$(\partial_t + u\,\partial_r)\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \qquad \text{(adiabática)}$$

sabiendo que

$$\rho(\xi=1) = 1$$
$$u(\xi=1) = 1$$
$$c^2(\xi=1) = 1$$

Modelo de Sedov-Taylor

- Usamos

$$\partial_t = -\frac{r\dot{R}}{R^2}\frac{d}{d\xi} = -\frac{2}{5}\frac{\xi}{t}\frac{d}{d\xi}$$

$$\partial_r = \frac{1}{R}\frac{d}{d\xi} = \frac{\xi}{r}\frac{d}{d\xi}$$

y obtenemos 3 ecs. ordinarias para $\rho(\xi)$, $u(\xi)$, $c^2(\xi)$

$$-4\xi\rho' + 9\rho u + 3\xi(\rho u)' = 0$$

$$20u + 8\xi u' - 6u^2 - 6\xi u u' = 10c^2 + 5\xi(c^2)'$$

$$(6u-10)\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} + (3u-4)\xi\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right)' = 0$$

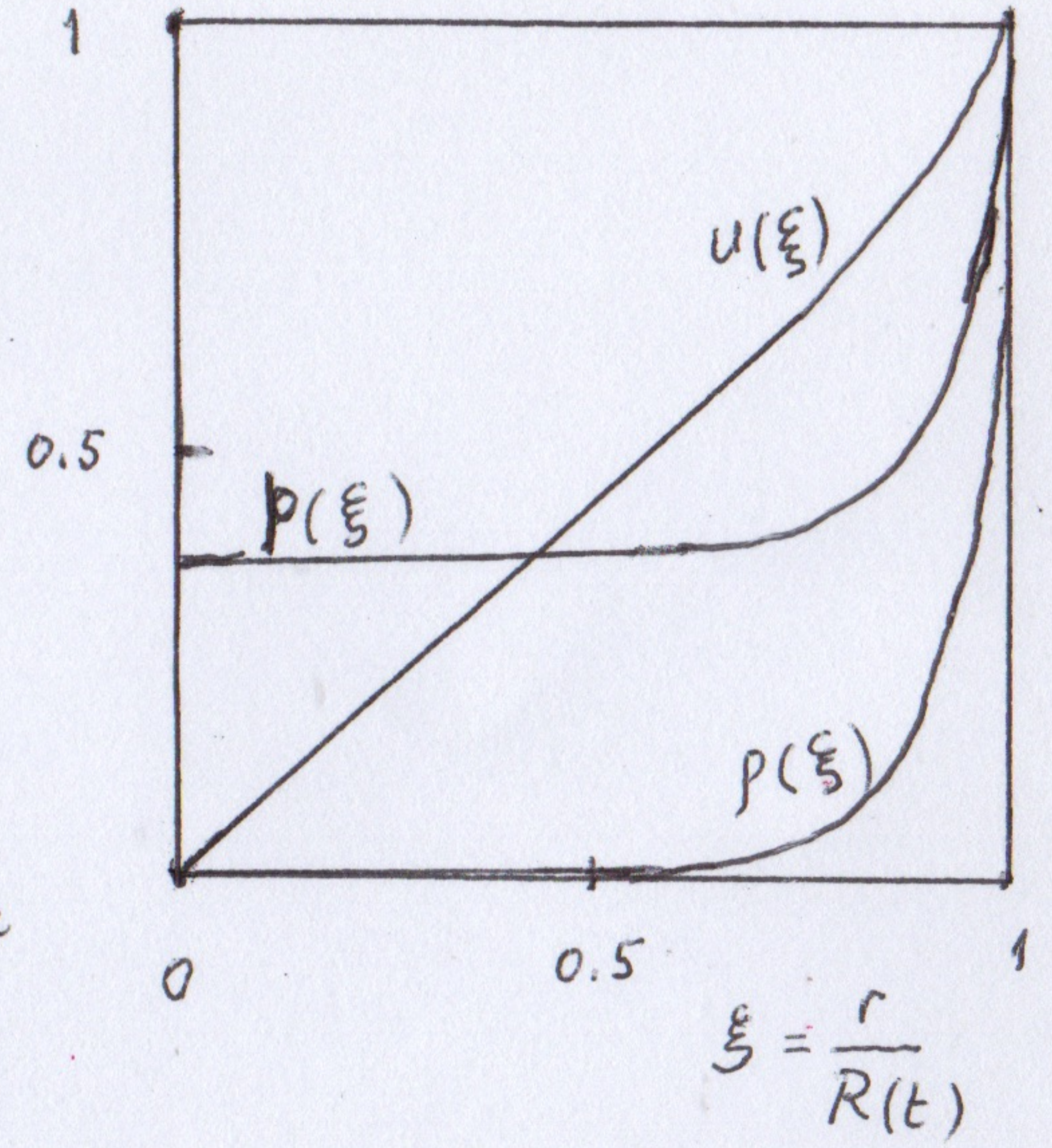
- Siguiendo a Landau, $c^2(\xi)$ resulta

$$c^2 = \frac{5}{3}\frac{(1-u)u^2}{5u-3}$$

y $$\xi^5 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{5-3u}{2}\right)^{-\frac{19}{13}}(5u-4)^{\frac{10}{13}}$$

$$\rho = (5u-4)^{\frac{9}{13}}\left(\frac{5-3u}{2}\right)^{\frac{57}{13}}(4-3u)^{-6}$$

con $\frac{4}{5} < u < 1$



- A lo largo de toda la evolución, la energía total del fluido es la energía de la explosión E_*.
- De esta ley de conservación puede obtenerse la constante adimensional R_0:

$$E_* = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \rho\left[\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}\right]$$

que en términos de las funciones adimensionales

$$R_0^2\,\frac{16\pi}{25}\int_0^1 d\xi\,\xi^4\rho(\xi)\left(\frac{u^2(\xi)}{2} + \frac{9}{10}c^2(\xi)\right) = 1$$