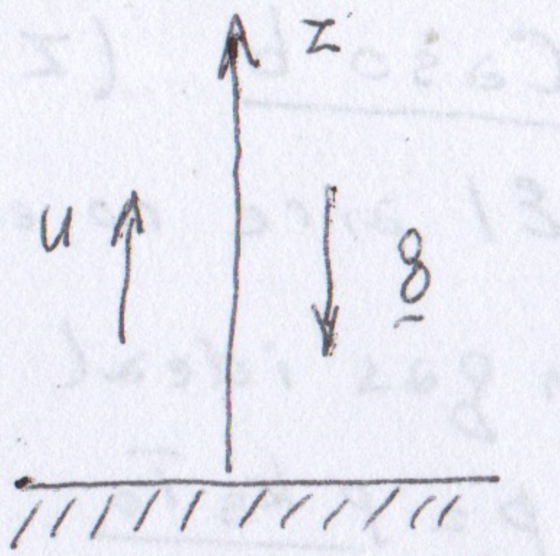
Clase anterior

- Repaso de conceptos básicos de teoría cinética: función de distribución y momentos.
- Ecuación de Boltzmann
- Distribución de Maxwell-Boltzmann
- Teorema H de Boltzmann: relajación colisional a distribución maxwelliana
- Repaso de conceptos básicos de dinámica de fluídos
- Teorema del virial
- Ejemplos de hidrostática: atmósferas incompresible e isotérmica

Atmósfera convectiva

- Supongamos ahora una atmósfera en estado estacionario con flujos solo en la dirección vertical.
- El movimiento vertical conlleva una forma de transporte de energía llamado convectivo.



$\partial_t = 0 = \partial_x = \partial_y$

Ec. cont.: $\partial_z (nU) = 0$

Ec. mov.: $p(z) \simeq p_0 e^{-z/H}$

(para flujos subsónicos $\rho \frac{du_z}{dt} \ll \partial_z p$)

Ec. energía: $\frac{3}{2} n k_B U \frac{\partial T}{\partial z} = -p \frac{\partial u}{\partial z}$

(sup. $\tilde{q} \cong 0$)

Ec. estado: $p = n k_B T$

Entonces:

$$\frac{u'}{u} + \frac{n'}{n} = 0$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} + \frac{T'}{T} = -\frac{1}{H}$$

$$\frac{3}{2} n k_B \cancel{u} T' + p \cancel{u} \left(\frac{1}{H} + \frac{T'}{T}\right) = 0$$

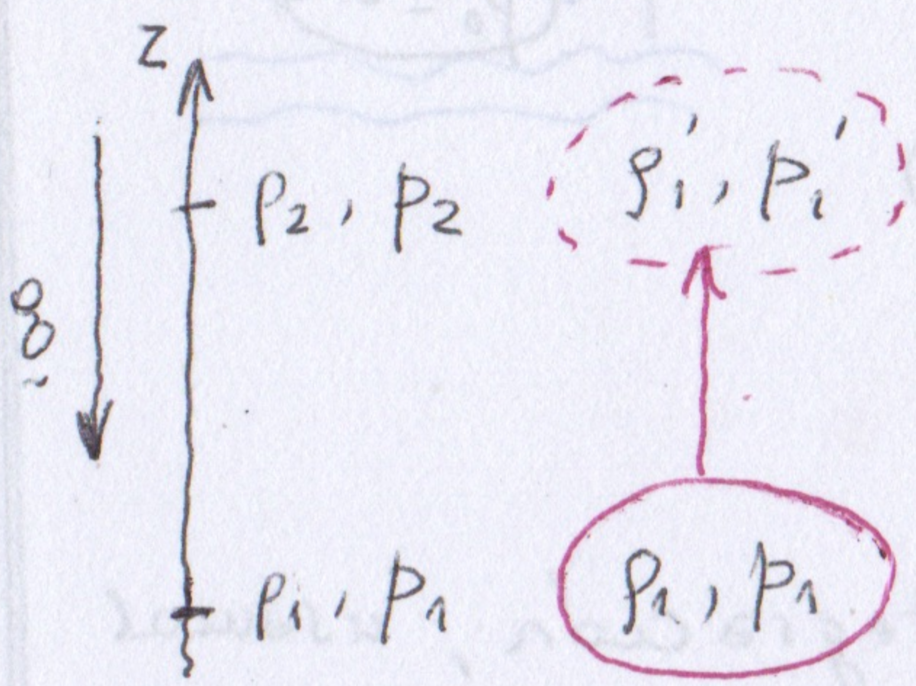
$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2mg}{5k_B} = -\frac{g}{c_p}$$

En el referencial del fluido

$$\frac{dT}{dt} = u\frac{dT}{dz} = -\frac{gu}{c_p}$$

$\frac{dT}{dt} = -\frac{gu}{c_p}$: $u > 0$ (ascenso) $\longrightarrow \frac{dT}{dt} < 0$ (se enfría); $u < 0$ (descenso) $\longrightarrow \frac{dT}{dt} > 0$ (calienta)

CRITERIO DE SCHARZSCHILD



- Supongamos que una gota con (ρ_1, p_1) asciende a una zona con (ρ_2, p_2) tomando valores (ρ_1', p_1').
- Sup. que inmediatamente alcanza balance de presión $p_1' = p_2$
- Sup. que asciende adiabaticamente $\rho_1' = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}$

El criterio de Scharzschild establece

$\rho_1' > \rho_2 \longrightarrow$ estable (peso > empuje)

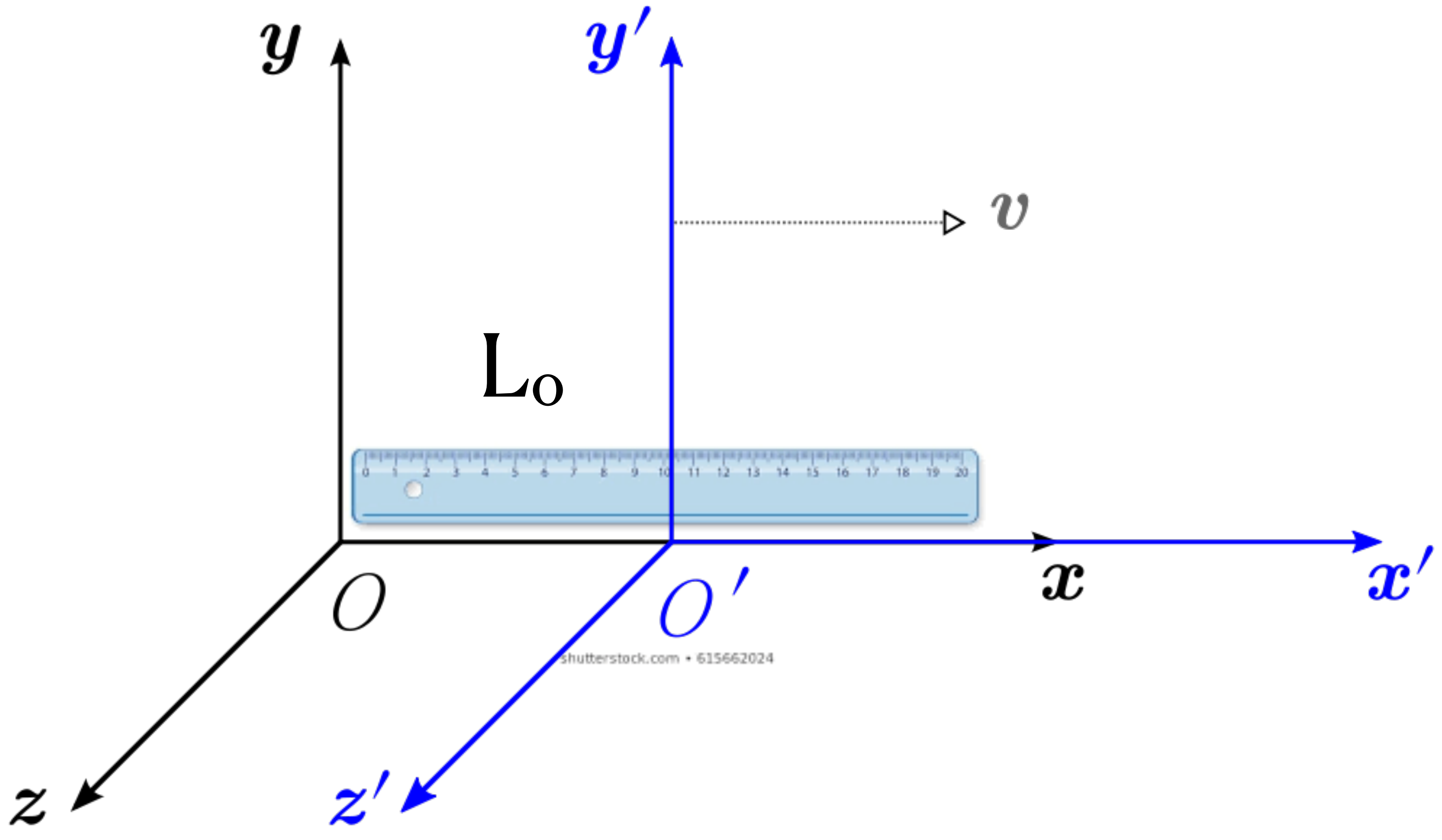
$\rho_1' < \rho_2 \longrightarrow$ inestable (peso < empuje)

En el segundo caso se pone en marcha una inestabilidad convectiva.

Teoría especial de la relatividad

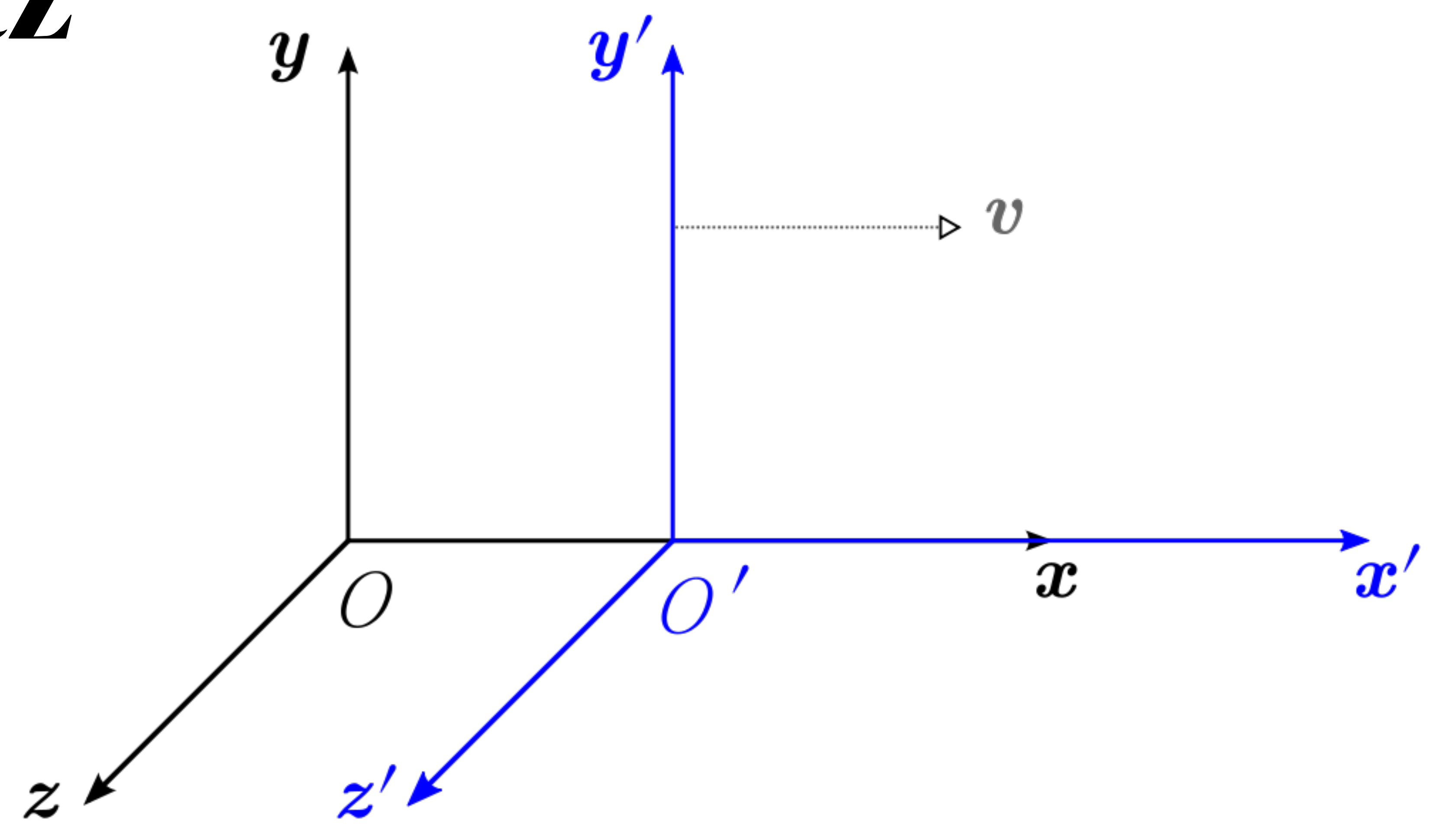
- En Mecánica Clásica damos por hecho que: (a) el tiempo es absoluto e independiente del observador, (b) la longitud de un objeto es una propiedad intrínseca del mismo.
- Asimismo, afirmamos que las leyes de la Mecánica son las mismas para todo **observador inercial**, y las conversiones de coordenadas cumplen las **transformaciones de Galileo**.
- La velocidad de la luz **c**, sin embargo, es independiente del observador y no sigue las transf. Galileo.
- Albert Einstein (1905) enuncia la *Teoría Especial de la Relatividad*, basada en estos postulados:

(1) Las leyes físicas (Mecánica, Óptica, EM, ...) valen en todos los sistemas inerciales.
(2) La luz se propaga en vacío con una velocidad definida c, independiente de la fuente emisora.



- Tenemos una regla de longitud L_0 en reposo para el observador O. Esa es la **longitud propia** de la regla, porque fue medida en un sistema en reposo.
- O´se mueve a velocidad v=cte respecto de O. El observador O mide el tiempo entre que O´cruza uno y otro extremo de la regla y obtiene $T = \frac{L_0}{v}$.
- O' ve la regla moviendose a -v. El tiempo que mide entre los extremos de la regla es $T_0 = \frac{L}{v}$. La longitud que observa O´es L, no es la longitud propia. En cambio T_0 es el **tiempo propio**, ya que fue medido en el sistema en reposo (en el orígen de O´).
- De lo anterior se infiere que $\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L}$, pero $\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L} \neq 1$ en general.

Transformación de Lorentz



- En Mecánica Clásica suponemos que $T = T_o$, lo cual implica tambien que $L = L_o$.
- Suponiendo homogeneidad espacial y temporal además de isotropía, ambos cocientes solo pueden ser función de v , la cual puede determinarse por experimentos y obtener que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L} = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- **Dilatación temporal**: $T = T_0\ \gamma(v)$ significa que el tiempo T entre dos eventos medido por un observador moviendose con v, es mayor que el tiempo propio T_o.
- **Contracción de longitudes**: $L = L_0/\gamma(v)$ significa que la longitud L de un objeto medido por un observador moviendose con v, es menor que la longitud propia L_o.

De lo anterior se deducen las <u>transformaciones de Lorentz</u> que rigen los cambios de coordenadas entre observadores inerciales:

$$x' = \gamma(v)\,(x - vt)$$

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Para la transf. inversa basta invertir los roles entre los observadores

$$\left.\begin{array}{l} x,t \longleftrightarrow x',t' \\ v \longleftrightarrow -v \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x = \gamma(v)\,(x' + vt') \\ t = \gamma(v)\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{array}$$

Si $x(t)$ es la posición de un punto, su velocidad es $U_x = \frac{dx}{dt}$. Para el observador O' es $U'_x = \frac{dx'}{dt'}$

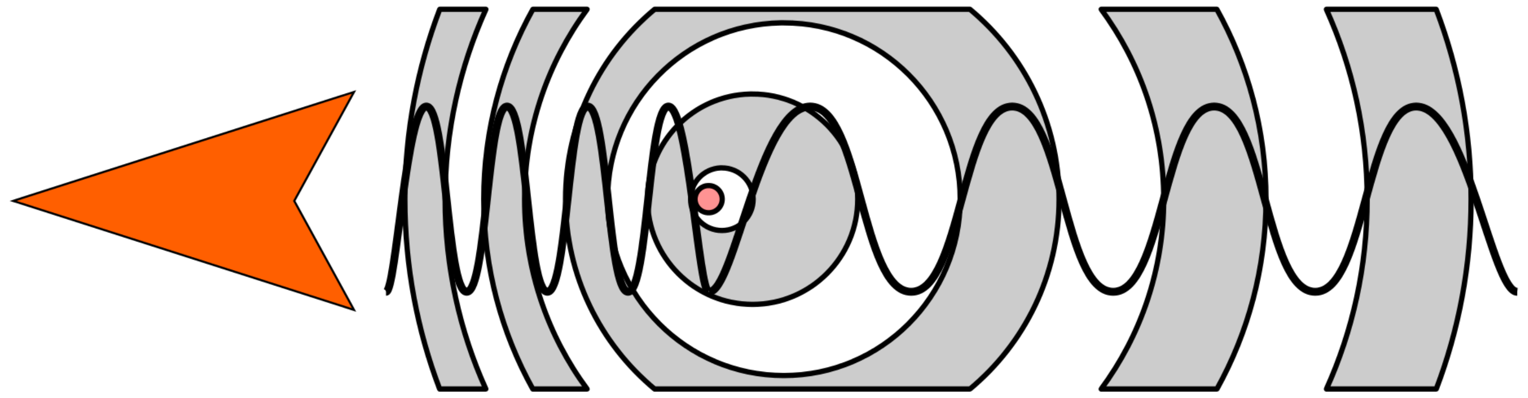
Diferenciando las relaciones anteriores

$$U'_x = \frac{U_x - V}{1 - \frac{VU_x}{c^2}}$$

Noten que como $dt' \neq dt$, tambien se modifican las otras componentes de la velocidad

$$U'_{y,z} = \frac{U_{y,z}}{\gamma(v)\left(1 - \frac{vU_x}{c^2}\right)}$$

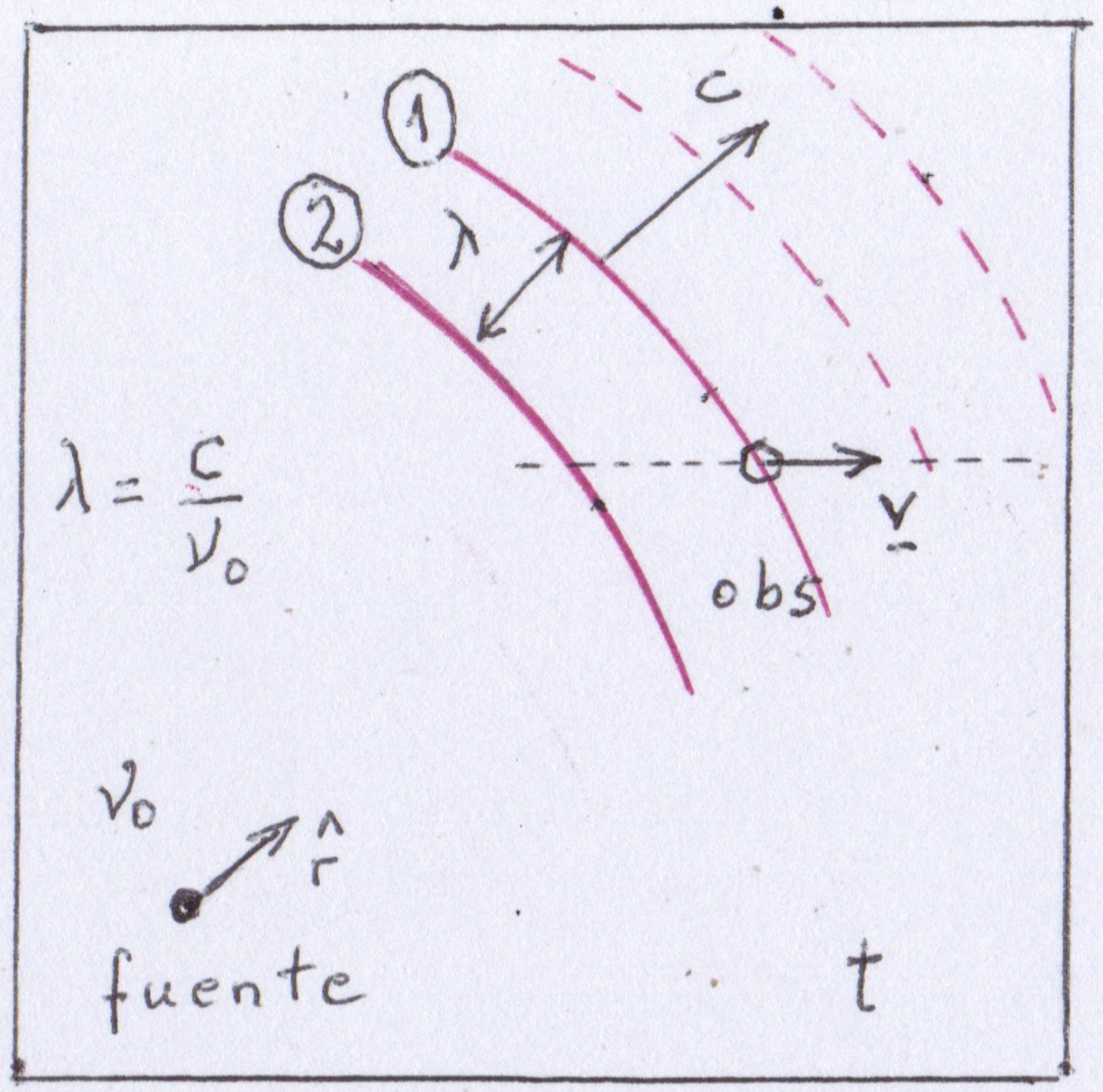
Efecto Doppler



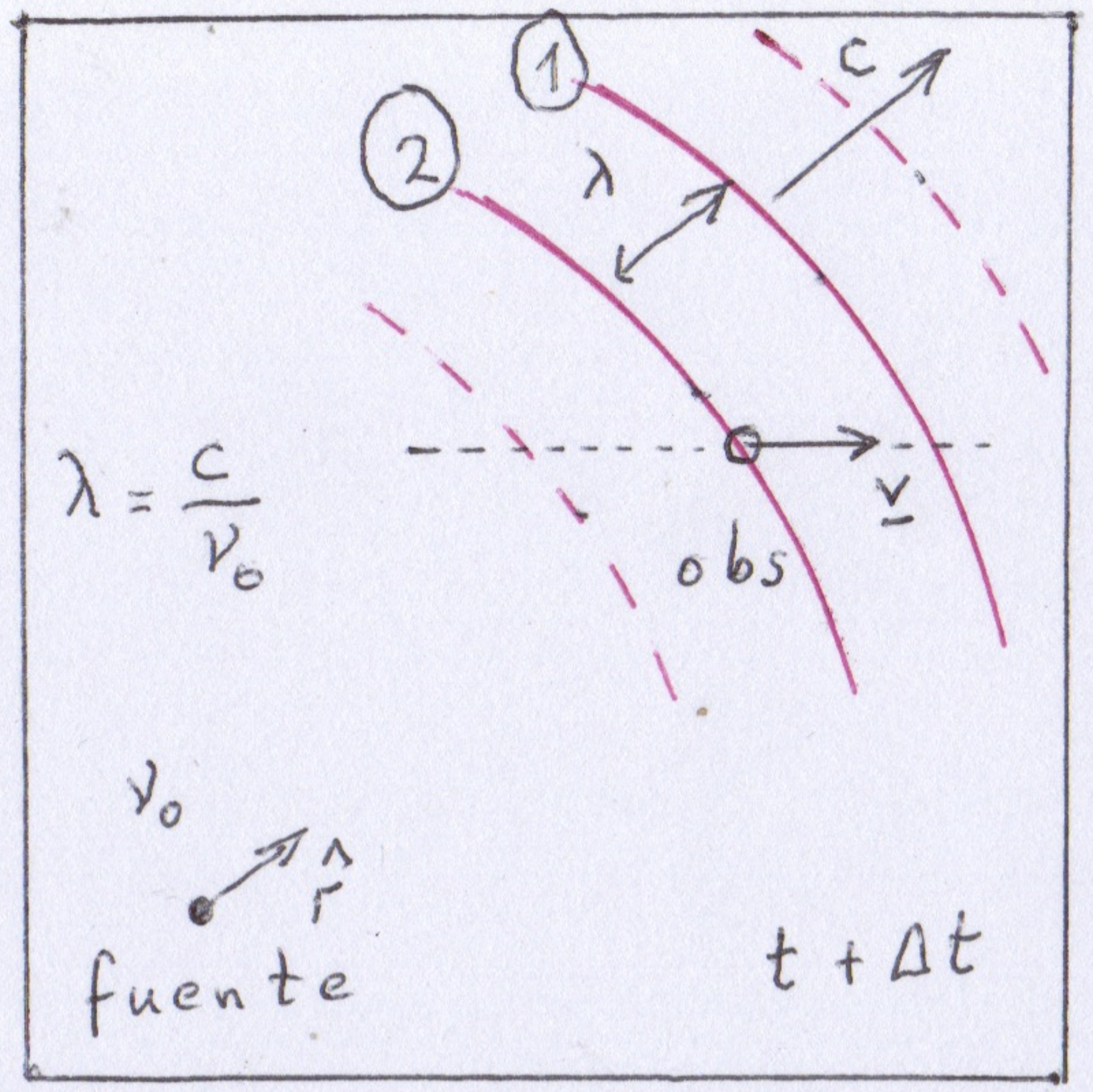
- El efecto Doppler (1842) corresponde a un cambio de frecuencia cuando la fuente se mueve respecto del observador. Ocurre para cualquier fenómeno ondulatorio (sonido, luz, ...).

- Es un fenómeno clásico, pero que tiene correcciones en el límite relativista $v \approx c$.

- Supongamos una fuente luminosa que emite frentes esféricos a la **frecuencia propia** ν_0 .



El observador se mueve con $\underline{v}$ y es alcanzado por el frente 1.



Un Δt despues, observador y frentes se desplazan y el obs. es alcanzado por 2.

Por lo tanto: $c\Delta t = \lambda + \underline{v}\cdot\hat{r}\,\Delta t \xrightarrow[\lambda = \frac{c}{\nu_0}]{} \Delta t = \frac{c/\nu_0}{c - \underline{v}\cdot\hat{r}}$

- En el caso clásico Δt es el mismo para fuente y obs. Como $\Delta t = \frac{1}{\nu_{obs}} \longrightarrow \boxed{\nu_{obs} = \nu_0 \left(1 - \frac{\underline{v}\cdot\hat{r}}{c}\right)}$

  Doppler clásico

- El Doppler clásico indica que si la fuente se aleja ($\underline{v}\cdot\hat{r} > 0$) entonces $\nu_{obs} < \nu_0$, es decir que la frecuencia medida se corre al rojo.

- Si la fuente se acerca ($\underline{v}\cdot\hat{r} < 0$) es $\nu_{obs} > \nu_0$ y el corrimiento es al azul.

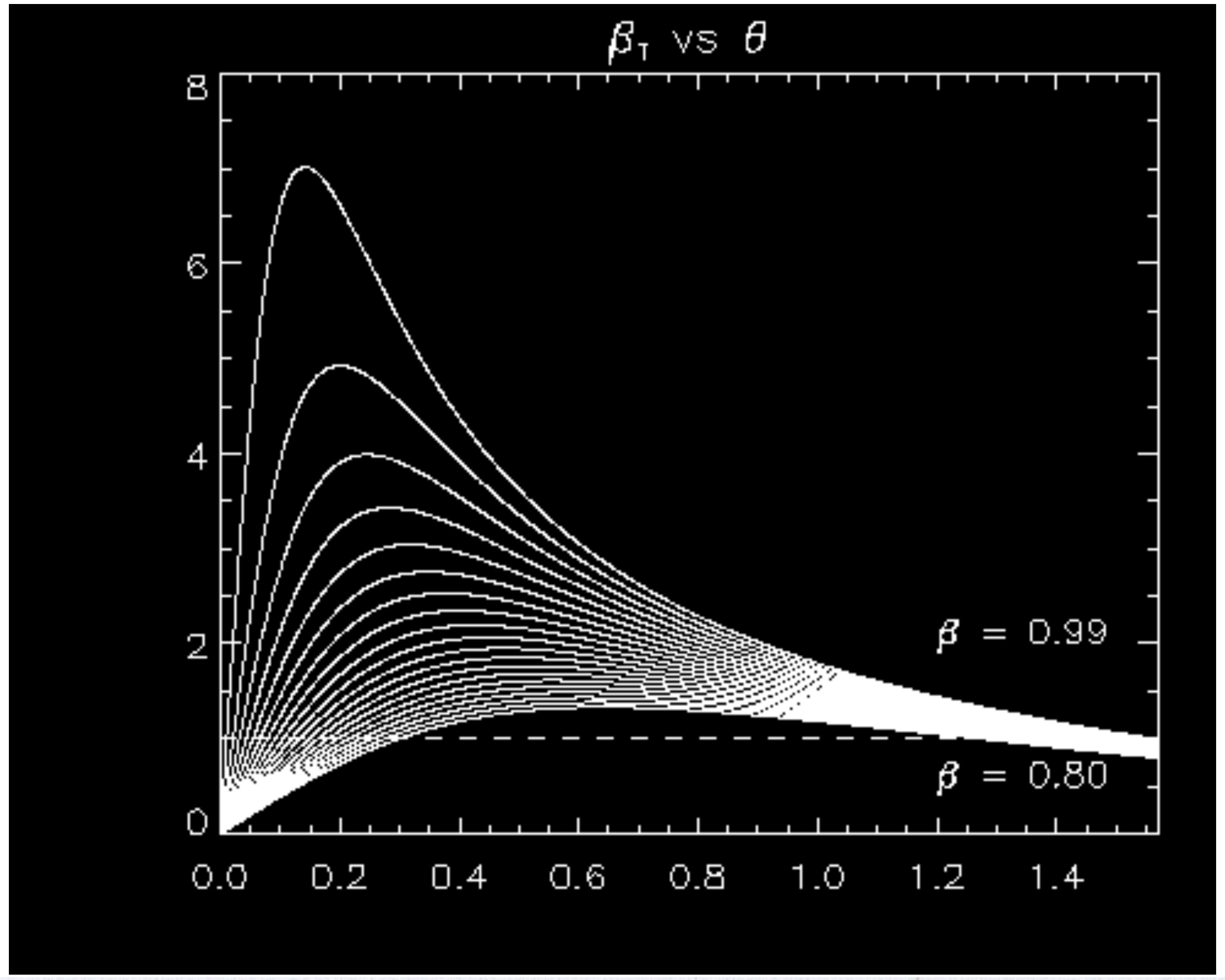
- En el caso relativista ($v \sim c$) es $\frac{\Delta t}{\Delta t_{obs}} = \gamma(v)$ ya que Δt_{obs} es el tiempo propio entre ambos eventos.

  Como $\Delta t_{obs} = \frac{1}{\nu_{obs}} \longrightarrow \boxed{\nu_{obs} = \nu_0 \frac{\left(1 - \frac{\underline{v}\cdot\hat{r}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$

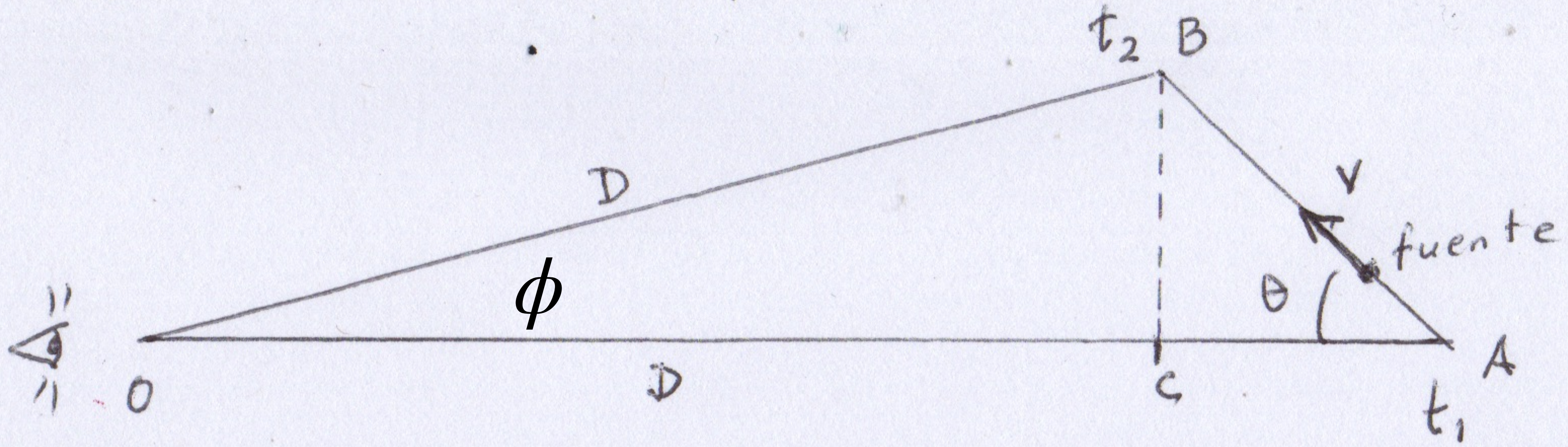
  Doppler relativista

- El efecto relativista es enfatizar el corrimiento en frecuencia ya que $\gamma > 1$.

Movimientos superlumínicos



- Se refiere al movimiento de objetos en el plano del cielo con un movimiento **aparente** superior a la velocidad de la luz.
- Debe tenerse en cuenta que las velocidades medidas en el plano del cielo corresponden a desplazamientos angulares multiplicados por la distancia a la fuente y divididos por el tiempo transcurrido.



- Un objeto que emite luz en todas direcciones, va de A a B pasando por A en t_1 y por B en t_2.
- El observador O detecta el pulso emitido en A a

$$t_1' = t_1 + \frac{D}{c} + \frac{v\,dt\cos\theta}{c} \qquad dt = t_2 - t_1$$

- El emitido desde B es detectado en

$$t_2' = t_2 + \frac{D}{c}$$

- Para el observador O, el tiempo entre ambos pulsos es

$$dt' = t_2' - t_1' = (1 - \beta\cos\theta)\,dt \qquad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

- En definitiva, el observador infiere que un objeto a distancia D tuvo un desplazamiento angular ϕ en un tiempo dt'. Entonces su velocidad transversal es

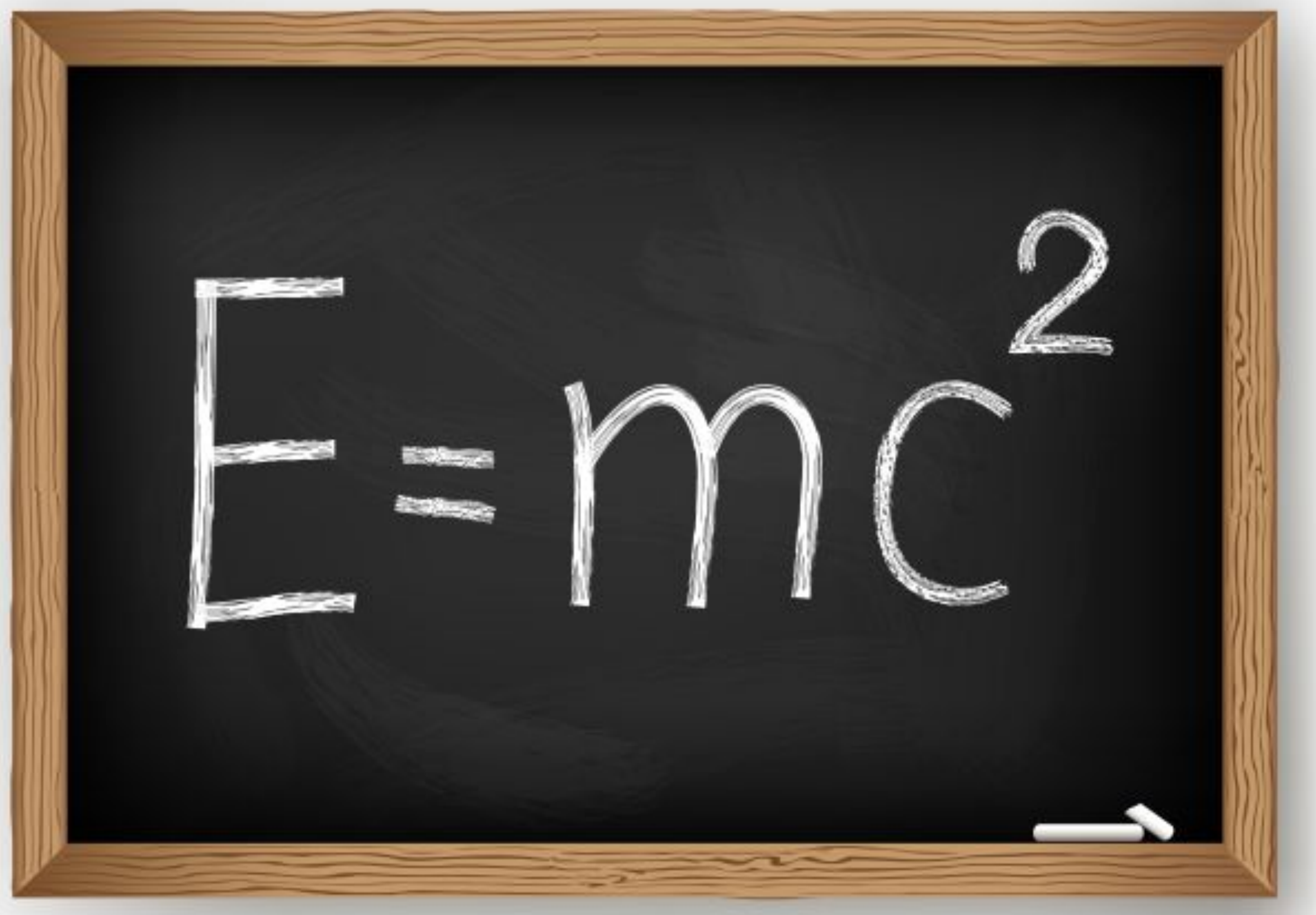
$$v_T = \frac{\phi D}{dt'} = \frac{v\,dt\sin\theta}{dt'} \qquad \text{usando } \phi D \simeq v\,dt\sin\theta$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1-\beta\cos\theta} \longrightarrow \beta_T = \frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

Si bien $\beta<1$, para ciertos ángulos puede obtenerse $\beta_T>1$.

Verifiquen que $\beta_T(\theta)$ tiene un máximo en $\theta_* = a\cos(\beta)$. y que $\beta_{T,max} = \gamma.\beta$ que puede ser mayor que 1.

Dinámica relativista



- Para extender la dinámica en el límite relativista, empezamos por redefinir el impulso lineal.
- El impulso de una partícula es $\underline{p} = m\,\gamma(u)\,\underline{u}$, puesto que es la cantidad que se conserva en colisiones de sistemas aislados.
- Conservamos la siguiente versión de ecuación de movimiento $\underline{F} = \dfrac{d\underline{p}}{dt}$
- La variación de energía cinética para una partícula que parte del reposo resulta

$$\Delta T = \int \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int \frac{d\underline{p}}{dt}\cdot \underline{u}\, dt = \int d\underline{p}\cdot\underline{u}$$

Integro por partes:

$$\Delta T = \underline{p}\cdot\underline{u}\Big|_i^f - \int \underline{p}\cdot d\underline{u}$$

$$\underline{p} = \gamma m \underline{u} \longrightarrow \Delta T = \Delta\left(\gamma(u)\, m u^2\right) - \int_0^{u^2} \frac{m}{2}\gamma(u)\, du^2$$

$$\int_0^{u^2} du^2 \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -2c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\Bigg|_0^{u^2}$$

De manera que:

$$\Delta T = \Delta\left(\gamma(u)\, m c^2\right)$$

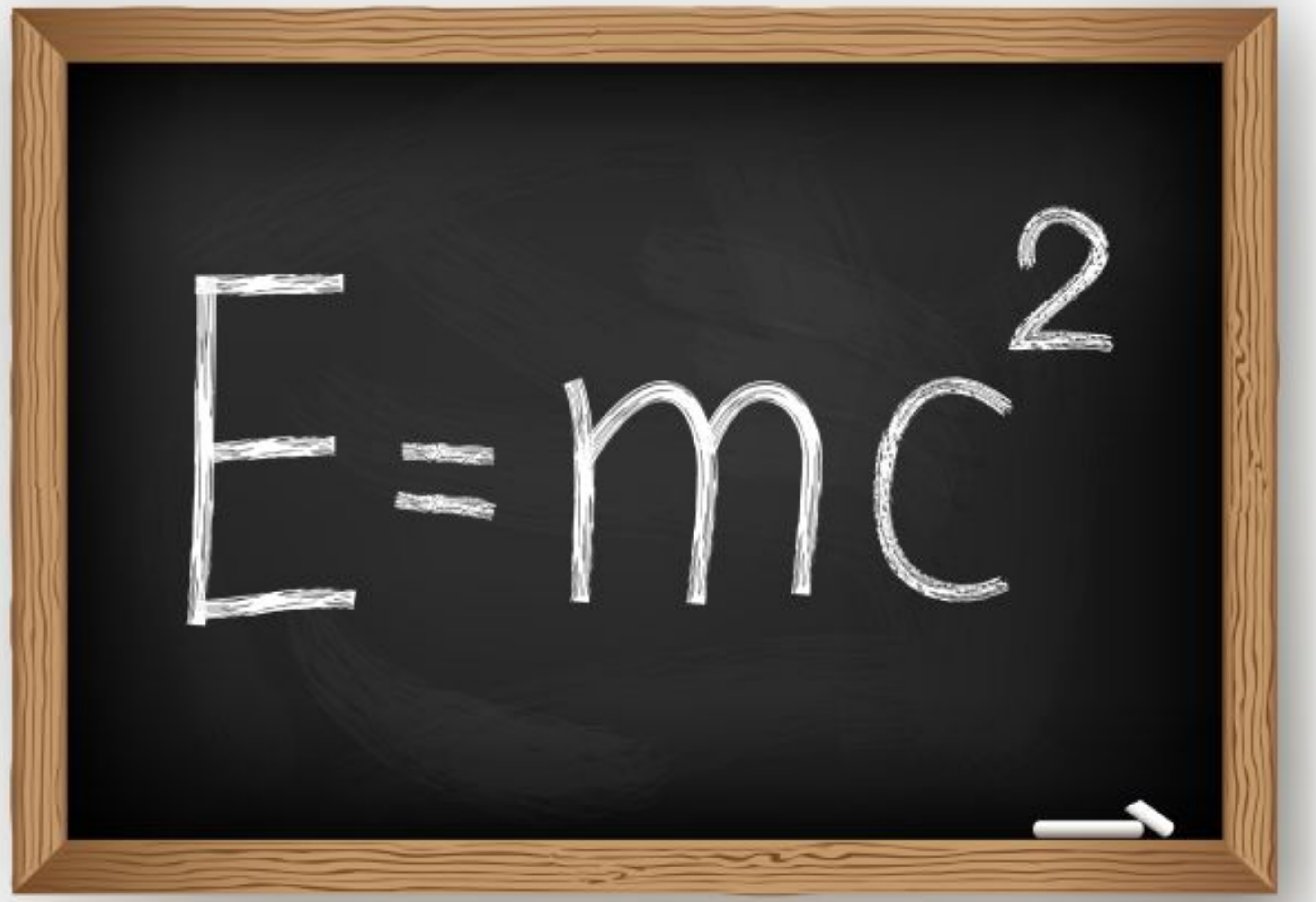
Definimos la energía de la partícula como

$$E = \gamma(u)\, m c^2$$

de manera que $\Delta T = E(u) - E(0)$

- Mirando las expresiones de $\underline{p}$ y E podemos generar la noción de masa $m(u) = m\cdot\gamma(u)$ donde m pasa a ser la <u>masa en reposo</u>.
- Entonces $E(u) = m(u)\, c^2$ expresa una equivalencia entre la masa relativista y la energía.

Dinámica relativista



- Aparece tambien la noción de **masa en reposo** de una partícula. Una partícula que no se mueve, tiene una energía $E = m\,c^2$.

- Para velocidades bajas respecto de c, podemos desarrollar en Taylor al órden mas bajo y obtener

$$E \;=\; m\,.\,c^2\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;\approx\; m\,.\,c^2\,(1+\frac{u^2}{2c^2})$$

con lo cual tenemos que E es la energía en reposo mas la versión clásica de energía cinética.

- Una relación que nos va a resultar útil es expresar la energía E en función del impulso y no de la velocidad :

$$E = \gamma m c^2 \longrightarrow E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$E^2 - E_0^2 = m^2c^4\left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right) \qquad \beta = \frac{u}{c}$$

$$\therefore\; E^2 - E_0^2 = \gamma^2\beta^2 m^2 c^4$$

$$\underset{\sim}{p} = \gamma m \underset{\sim}{u} \longrightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 \beta^2 c^2$$

$$\therefore\; E^2 - E_0^2 = c^2p^2$$

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

- Esto muestra que objetos sin masa en reposo como los fotones, tambien tienen energía ($E_{fot} = cp$).