Clase anterior

- Teoría especial de la relatividad (Einstein, 1905).

- Dilatación temporal y contracción de longitudes.

- Transformaciones de Lorentz.

- Efecto Doppler: aproximación clásica y corrección relativista.

- Movimientos aparentemente superlumínicos.

- Dinámica relativista: $E = m.c^2$. Límite clásico.

- Energía vs impulso: $E^2 = m^2.c^4 + p^2.c^2$

Función de distribución de fotones

- Puesto que la información de los fenómenos astronómicos nos llega fundamentalmente a través de la luz emitida, resulta esencial tener un modelo confiable de **interacción luz-materia**.
- Así como las estructuras fundamentales de la materia son las **partículas**, los componentes fundamentales de la luz son los **fotones** (ver Choudhuri 2010, Astrophysics for Physicists, cap. 2).
- Los fotones son objetos eminentemente relativistas (se mueven a la velocidad de la luz) y cuánticos ($E = h\nu$, h: cte Planck). Probemos una descripción estadística de fotones a través de su función de distribución.

Los fotones son objetos ultrarelativistas ($v \simeq c$) sin masa

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \xrightarrow[m=0]{} E = pc$$

Además son cuantos de energía

$$E = h\nu \qquad h = 6.626 \cdot 10^{-27}\ \text{erg.s} : \text{cte. Planck}$$

Sea $d^3r\, d^3p\, f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ el # fotones en $d^3r\, d^3p$ a t

En esféricas en espacio $\mathbf{p}$:

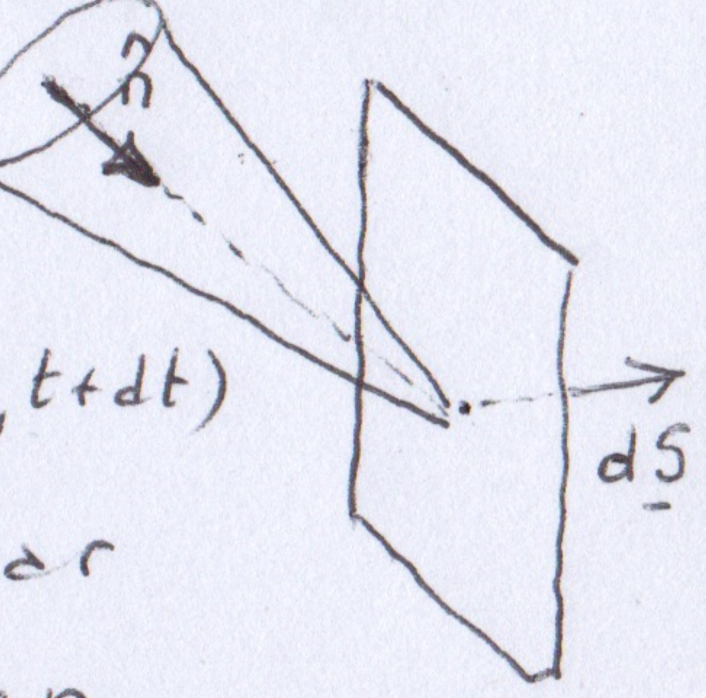
$$d^3p = dp\, p^2\, d\Omega \qquad d\Omega = d\varphi\, d\theta \sin\theta : \text{ángulo sólido}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = pc \\ E = h\nu \end{array}\right\} \longrightarrow p = \frac{h\nu}{c} \longrightarrow dp = \frac{h}{c}\, d\nu$$

$$\therefore d^3p = \left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2\, d\nu\, d\Omega$$

La cantidad que se utiliza en Astronomía para estudiar transporte de radiación es I_ν, tal que

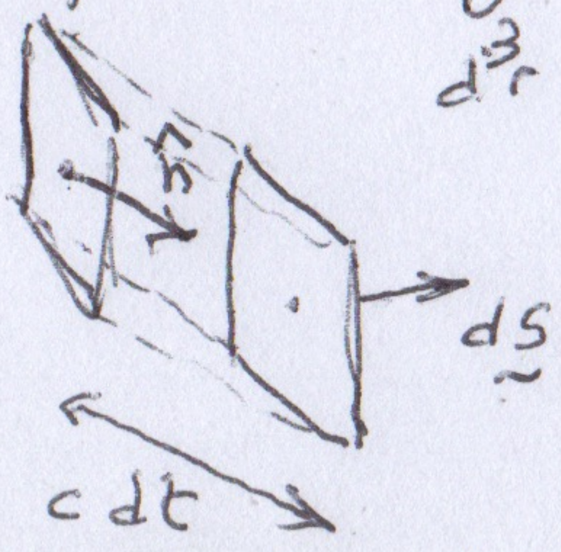
$$I_\nu(\mathbf{r}, t, \hat{n})\, d\nu\, d\Omega\, \hat{n}\cdot d\mathbf{S}\, dt$$



Intensidad en $(\nu, \nu+d\nu)$ atravesando $d\mathbf{S}$ en direcciones $d\Omega$ alrededor de $\hat{n}$ en $(t, t+dt)$

Para relacionar I_ν con f debemos considerar $\frac{I_\nu}{h\nu}$ (# fotones) y considerar el volumen

$$d^3r = c\,dt\, \hat{n}\cdot d\mathbf{S}$$



$$\therefore \frac{I_\nu}{h\nu}\, d\nu\, d\Omega\, \hat{n}\cdot d\mathbf{S}\, dt = f \underbrace{\left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2\, d\nu\, d\Omega}_{d^3p}\ \underbrace{c\,dt\, \hat{n}\cdot d\mathbf{S}}_{d^3r}$$

Ecuación de transporte radiativo

Es decir que $\boxed{I_\nu = \frac{h^4\nu^3}{c^2} f_\nu}$

La ecuación de transporte radiativo para I_ν debe ser entonces la ecuación de Boltzmann para f_ν, es decir

$$\partial_t f_\nu + \underset{\downarrow\ \underline{u} = c\hat{n}}{\underline{u}\cdot\underline{\nabla} f_\nu} + \underset{\underset{\text{(para fotones)}}{\underline{F}=0}}{\underline{F}\cdot\nabla_{\underline{p}} f_\nu} = \underset{\text{término de colisiones con materia}}{C(f_\nu)}$$

En términos de I_ν:

$$\partial_t I_\nu + \underline{u}\cdot\underline{\nabla} I_\nu = \Gamma_\nu = \Gamma_\nu^+ - \Gamma_\nu^-$$

Los procesos colisionales incluidos en Γ_ν corresponden a absorción (pérdida de fotón), emisión (ganancia de fotón) y scattering (cambio de dirección).

Así por ejemplo:

$$\boxed{\Gamma_\nu^- = \Gamma_{\nu,abs}^- + \Gamma_{\nu,scatt}^- = (k_\nu + \sigma_\nu)\rho I_\nu = K_\nu \rho I_\nu}$$

donde

k_ν : coef. absorción

σ_ν : coef. scattering

ρ : densidad de masa del medio

$K_\nu = k_\nu + \sigma_\nu$: opacidad

Noten que Γ_ν^- es proporcional tanto a I_ν como a ρ.

Así como el scattering remueve fotones de la dirección $\hat{n}$, el proceso inverso permite ganar fotones en $\hat{n}$:

$$\Gamma_{\nu,scatt}^+ = \oint \sigma_\nu \rho I_\nu P(\Omega)\, d\Omega$$

$P(\Omega)$: probabilidad de scattering

Para scattering isótropo es $P(\Omega) = \frac{1}{4\pi}$

$$\boxed{\Gamma_{\nu,scatt}^+ = \sigma_\nu \rho \oint \frac{d\Omega}{4\pi} I_\nu = \sigma_\nu \rho J_\nu}$$

donde $J_\nu = \oint \frac{d\Omega}{4\pi} I_\nu$: intensidad media

Y por último tenemos la emisión de fotones

$$\boxed{\Gamma_{\nu,em}^+ = \rho e_\nu}$$

e_ν : emisividad del medio

Para el caso de equilibrio termodinámico a temp T, los coef. de absorción y emisión se relacionan con la ley de Kirchoff

$$e_\nu = k_\nu B_\nu(T)$$

$B_\nu(T)$: Planck

Ecuación de transporte radiativo

Reemplazando todas estas expresiones de $\Gamma_\nu^\pm$:

$$\partial_t I_\nu + \underline{u}\cdot\underline{\nabla} I_\nu = \rho\left[e_\nu + \sigma_\nu J_\nu - k_\nu I_\nu - \sigma_\nu I_\nu\right]$$

donde $J_\nu = \oint \frac{d\Omega}{4\pi} I_\nu$

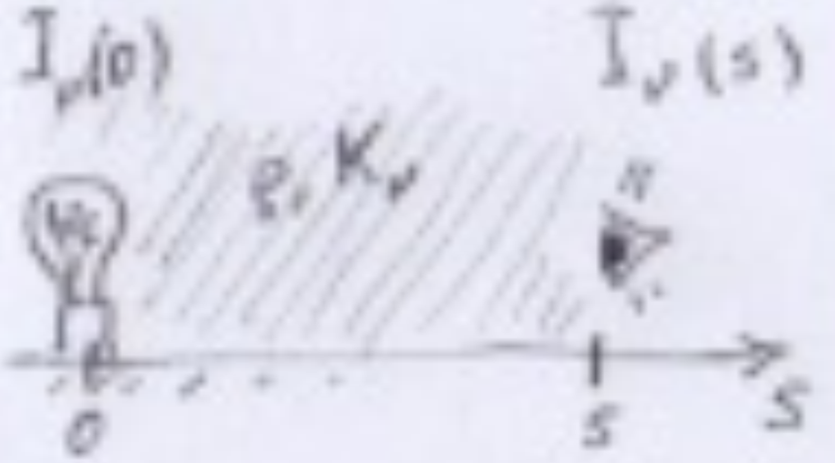
Definimos la función fuente $S_\nu = \dfrac{e_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu}$

para escribir la ecuación de tte radiativo

$$\boxed{\partial_t I_\nu + c\,\hat{n}\cdot\underline{\nabla} I_\nu = \rho K_\nu (S_\nu - I_\nu)}$$

Esta ecuación rige el transporte de radiación a través de medios materiales. Su resolución en casos generales es muy complicada. Veamos algunos ejemplos sencillos.

Supongamos el transporte estacionario 1D desde una fuente conocida, a través de un medio sin fuente ($S_\nu = 0$)



$$\partial_s I_\nu = -\frac{\rho K_\nu}{c} I_\nu \longrightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0)\, e^{-\frac{\rho K_\nu s}{c}}$$

El medio es solo absorbente (como niebla), de modo que la intensidad decae con la distancia a la fuente. Definimos el camino libre medio de fotones

$$\lambda_\nu = \frac{c}{\rho K_\nu} \longrightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0)\, e^{-\frac{s}{\lambda_\nu}}$$

Podemos definir también la profundidad óptica del medio como:

$$d\tau_\nu = \frac{\rho K_\nu}{c} ds \longrightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu}$$

Si usamos τ_ν como coordenada en el caso general

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{d\tau_\nu}{ds}\frac{\partial}{\partial \tau_\nu} = \frac{\rho K_\nu}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \longrightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

Suponiendo S_ν conocida, podemos integrar esta ecuación inhomogénea

$$I = I_{hom} + I_{part} \longrightarrow \frac{dI_{hom}}{d\tau} = -I_{hom} \longrightarrow I_{hom} = A e^{-\tau}$$

$$I_{part} = F(\tau)\, e^{-\tau} \longrightarrow \frac{dI_p}{d\tau} = \frac{dF}{d\tau} e^{-\tau} - \cancel{F e^{-\tau}} = S - \cancel{F e^{-\tau}}$$

$$F = \int_0^\tau dt\, e^t S(t) \longrightarrow I = A e^{-\tau} + \int_0^\tau dt\, S(t)\, e^{-(\tau - t)}$$

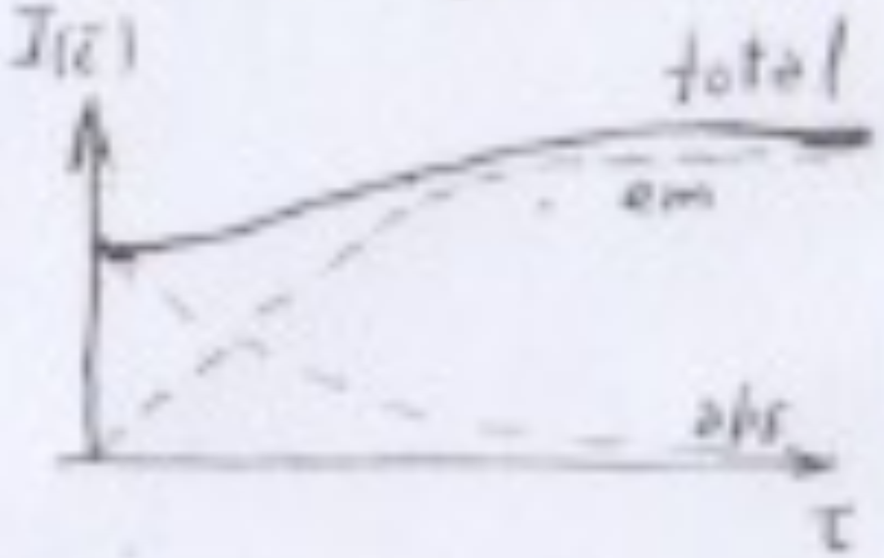
Opticamente delgado y grueso

Usando que $I_\nu(0) = I_0 \longrightarrow A = I_0$

$$I(\tau) = I_0 e^{-\tau} + \int_0^\tau dt\, S(t)\, e^{-(\tau - t)}$$

Suponiendo que la función fuente es homogénea (es decir S indep de t)

$$I(\tau) = \underbrace{I_0 e^{-\tau}}_{\text{absorción}} + \underbrace{S(1 - e^{-\tau})}_{\text{emisión}}$$

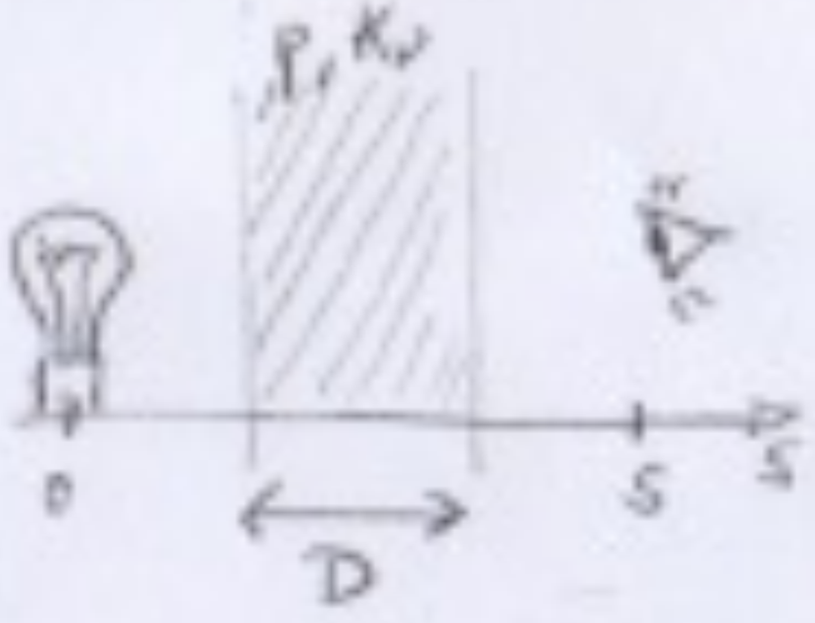


Aquí el medio absorbe pero también emite.

Supongamos un medio con extensión D:

Su prof. óptica total es

$$\tau_\nu(D) = \frac{\rho \kappa_\nu}{c} D = \frac{D}{\lambda_\nu}$$



Diremos que la atmósfera es ópticamente gruesa si $\tau_\nu(D) \gg 1 \longrightarrow \lambda_\nu \ll D$

y ópticamente delgada si $\tau_\nu(D) \ll 1 \longrightarrow \lambda_\nu \gg D$

Noten que esto depende fuertemente de ν.

Una atmósfera puede ser delgada a ciertas frecuencias y gruesa en otras.

Caso ópticamente grueso

$$\tau \gg 1 \longrightarrow e^{-\tau} \sim 0 \longrightarrow I_\nu \simeq S_\nu$$

Caso ópticamente delgado

$$\tau \ll 1 \longrightarrow e^{-\tau} \sim 1 - \tau \longrightarrow I_\nu(D) = I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)]\,\tau_\nu(D)$$

- Entonces, la interpretación de la función fuente S_ν, es que corresponde a la intensidad en el límite ópticamente grueso.
- Si podemos suponer que la fuente se comporta como cuerpo negro, entonces:

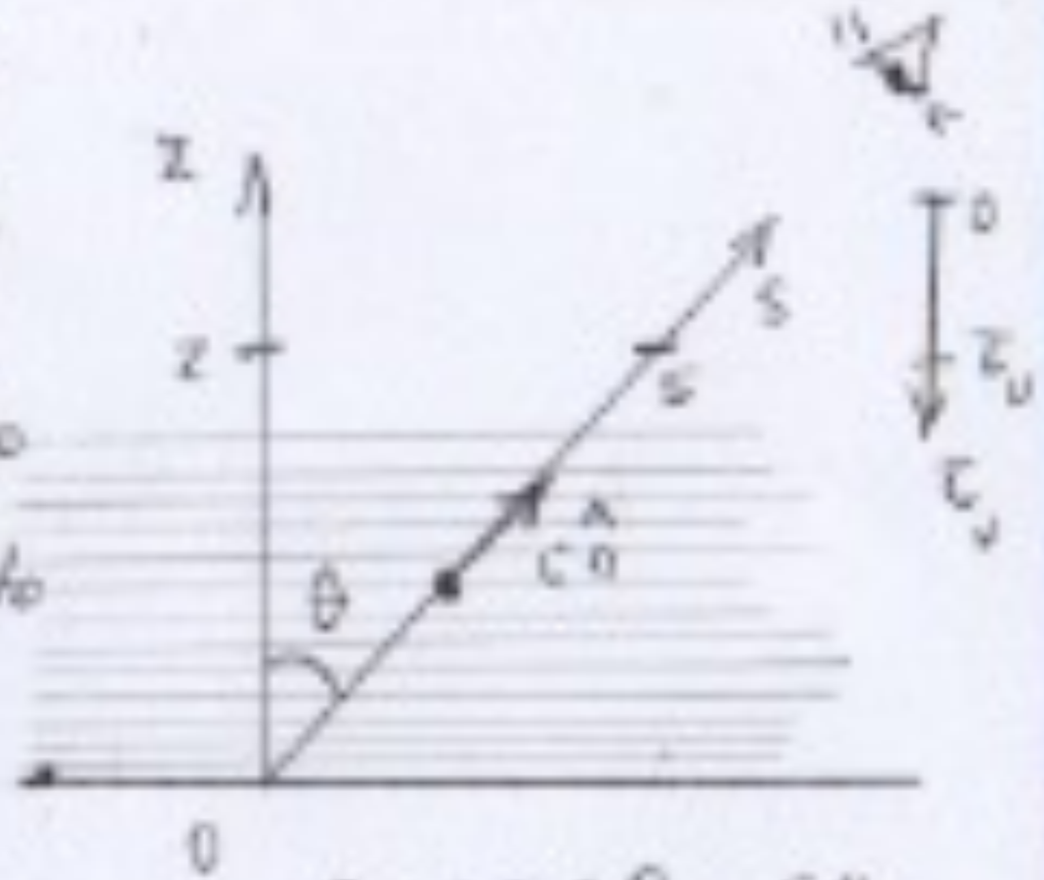
$$I_\nu \simeq S_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{función de Planck}$$

- En el caso ópticamente delgado, la atmósfera produce absorción de una fuente que pudiera tener detrás ($I_\nu \simeq I_\nu(0)(1 - \tau_\nu)$) y emite luz en proporción a su profundidad óptica ($I_\nu \simeq S_\nu \tau_\nu$).

Atmósfera plano-paralela

• Supongamos una atmósfera que localmente podemos suponer plana (estratificada según z).

• Supongamos estar observando en forma oblicua ($\mu = \cos\theta$) respecto de la vertical.



$z = s\cos\theta = s\mu$

• Definimos la prof. óptica τ_ν con origen en el observador, es decir

$$\tau_\nu(z) = \int_z^\infty \frac{\rho\kappa_\nu}{c}\,dz \longrightarrow d\tau_\nu = -\frac{\rho\kappa_\nu}{c}\,dz$$

La ecuación de transporte en este caso resulta

$$\partial_t = 0$$

$$c\hat{n}\cdot\nabla = c\frac{\partial}{\partial s} = c\mu\frac{\partial}{\partial z} = -(c\mu)\left(\frac{\rho\kappa_\nu}{c}\right)\frac{\partial}{\partial\tau_\nu}$$

$$\therefore\ \partial_t I_\nu + c\hat{n}\cdot\nabla I_\nu = \rho\kappa_\nu(S_\nu - I_\nu) \longrightarrow \mu\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

• Podemos usar la solución general que obtuvimos, pero teniendo en cuenta tres diferencias:

(a) un cambio de signo debido a la definición de τ_ν.

(b) el factor μ ($\mu = \cos\theta$)

(c) no hay fuente detrás de la atmósfera ($I_\nu(0) = 0$)

$$\therefore\ I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty \frac{dt}{\mu} S_\nu(t)\, e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}$$

• La intensidad predicha para el observador, ubicado en $\tau_\nu = 0$, resulta

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu) = \int_0^\infty \frac{dt}{\mu} S_\nu(t)\, e^{-t/\mu}}$$

• Expresa el aporte de la emisión de las sucesivas capas ($S_\nu(t)$) con la atenuación de las capas superiores ($e^{-t/\mu}$)

• Esta solución matemáticamente simple, encubre la gran complejidad en la dependencia con la frecuencia ν. Los mecanismos de emisión, absorción y scattering dependen del estado termodinámico de la atmósfera y los coeficientes ($\epsilon_\nu, \kappa_\nu, \sigma_\nu$) tienen una fuerte dependencia con ν.