Clase anterior

- Fotones, objetos cuánticos y ultra-relativistas.

- Función de distribución de fotones, interacción radiación-materia.

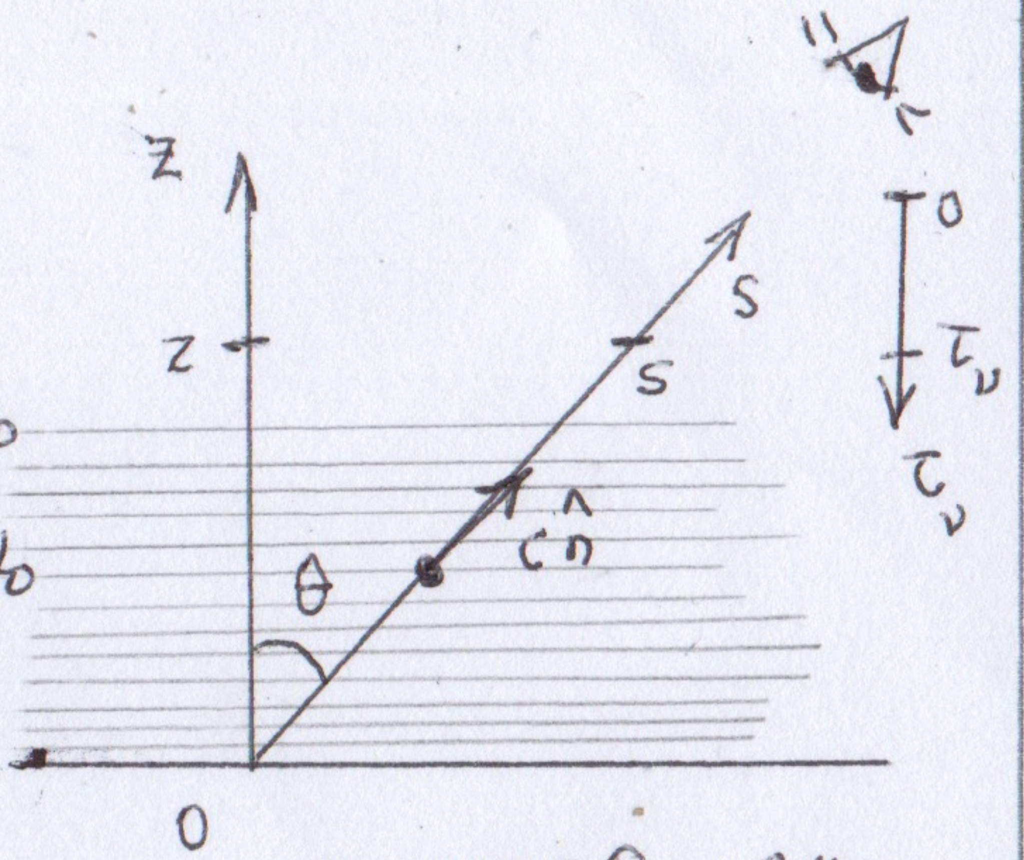
- Ecuación de transporte radiativo: absorción, emisión, scattering.

- Profundidad óptica. Función fuente.

- Atmósferas opticamente gruesas y opticamente delgadas.

Atmósfera plano-paralela

- Supongamos una atmosfera que localmente podemos suponer plana (estratificada segun z).



$z = s\cos\theta = s\mu$

- Supongamos estar observando en forma oblicua ($\mu = \cos\theta$) respecto de la vertical.
- Definimos la prof. óptica τ_ν con origen en el observador, es decir

$$\tau_\nu(z) = \int_z^\infty \frac{\rho K_\nu}{c}\, dz \longrightarrow d\tau_\nu = -\frac{\rho K_\nu}{c} dz$$

La ecuación de transporte en este caso resulta

$$\partial_t = 0$$

$$c\hat{n}\cdot\underset{\sim}{\nabla} = c\frac{\partial}{\partial s} = c\mu\frac{\partial}{\partial z} = -(c\mu)\left(\frac{\rho K_\nu}{c}\right)\frac{\partial}{\partial \tau_\nu}$$

$$\therefore\ \partial_t I_\nu + c\hat{n}\cdot\underset{\sim}{\nabla} I_\nu = \rho K_\nu (S_\nu - I_\nu) \longrightarrow \mu\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

- Podemos usar la solución general que obtuvimos, pero teniendo en cuenta tres diferencias:

(a) un cambio de signo debido a la definicion de τ_ν.

(b) el factor μ ($\mu = \cos\theta$)

(c) no hay fuente detrás de la atmósfera ($I_\nu(0) = 0$)

$$\therefore\ I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty \frac{dt}{\mu} S_\nu(t)\, e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}$$

- La intensidad predicha para el observador, ubicado en $\tau_\nu = 0$, resulta

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu) = \int_0^\infty \frac{dt}{\mu} S_\nu(t)\, e^{-t/\mu}}$$

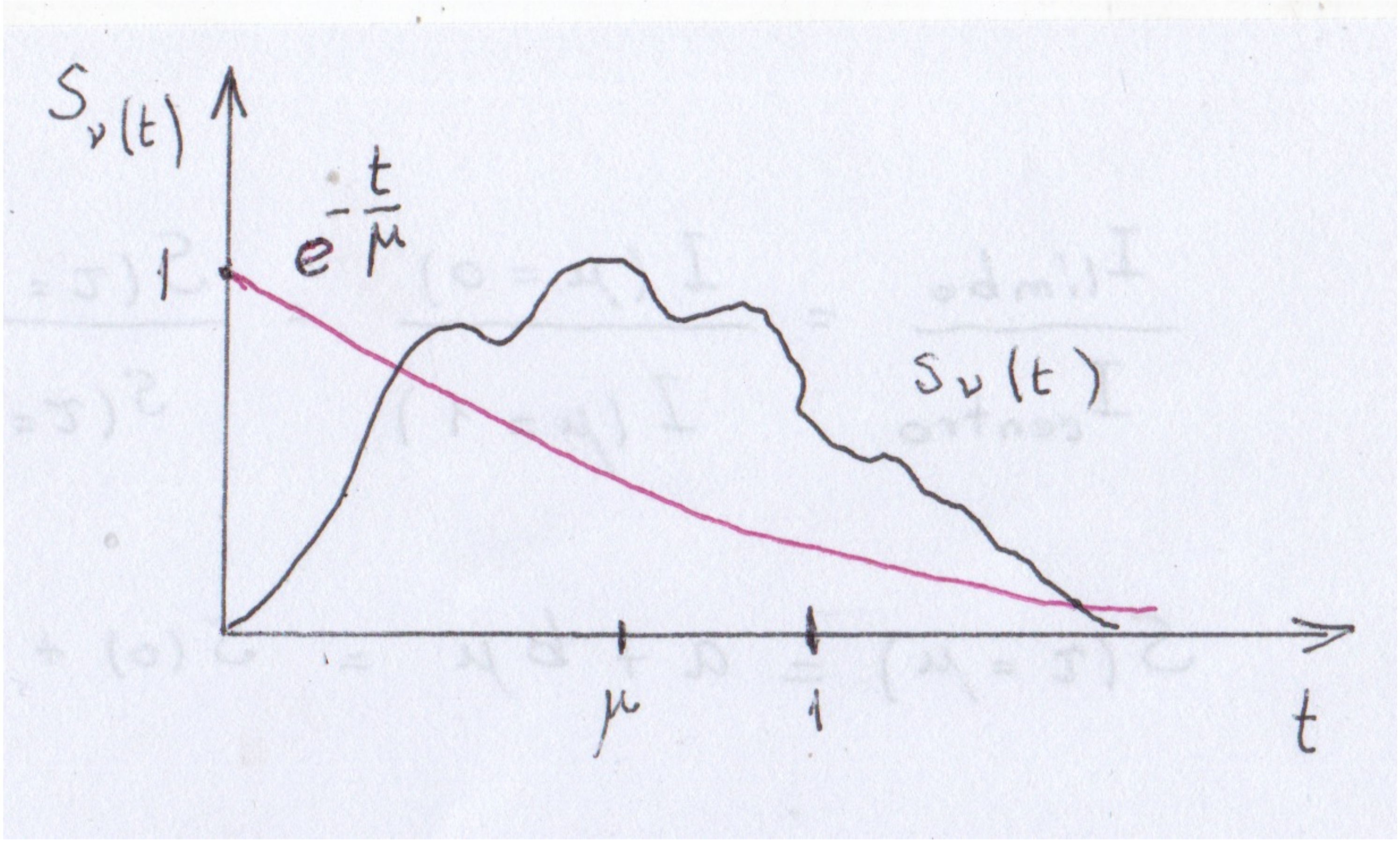
- Expresa el aporte de la emisión de las sucesivas capas ($S_\nu(t)$) con la atenuación de las capas superiores ($e^{-t/\mu}$).

- Esta solución matematicamente simple, encubre la gran complejidad en la dependencia con la frecuencia ν. Los mecanismos de emisión, absorción y scattering dependen del estado termodinámico de la atmósfera y los coeficientes (e_ν, k_ν, σ_ν) tienen una fuerte dependencia con ν.

Aproximación de Eddington-Barbier

- Según la solucion que obtuvimos para una atmósfera plano-paralela, la intensidad emergente que detecta el observador es

$$I_\nu(\tau_\nu = 0,\ \mu) \ = \int_0^\infty \frac{dt}{\mu}\, S_\nu(t)\ e^{-\frac{t}{\mu}}$$



- Como $S_\nu(t)$ va multiplicada por $e^{-\frac{t}{\mu}}$, solo necesitamos conocer la función fuente para $t \leq 1$
- Proponemos entonces un desarrollo de Taylor alrededor de t = 0 , es decir

$$S_\nu(t) \ \approx \ a_0 + a_1 t + \dots$$

- Usando que $\displaystyle\int_0^\infty dx\ x^n\ e^{-x} = n!$ y con el cambio de variables $x = \dfrac{t}{\mu}$ resulta

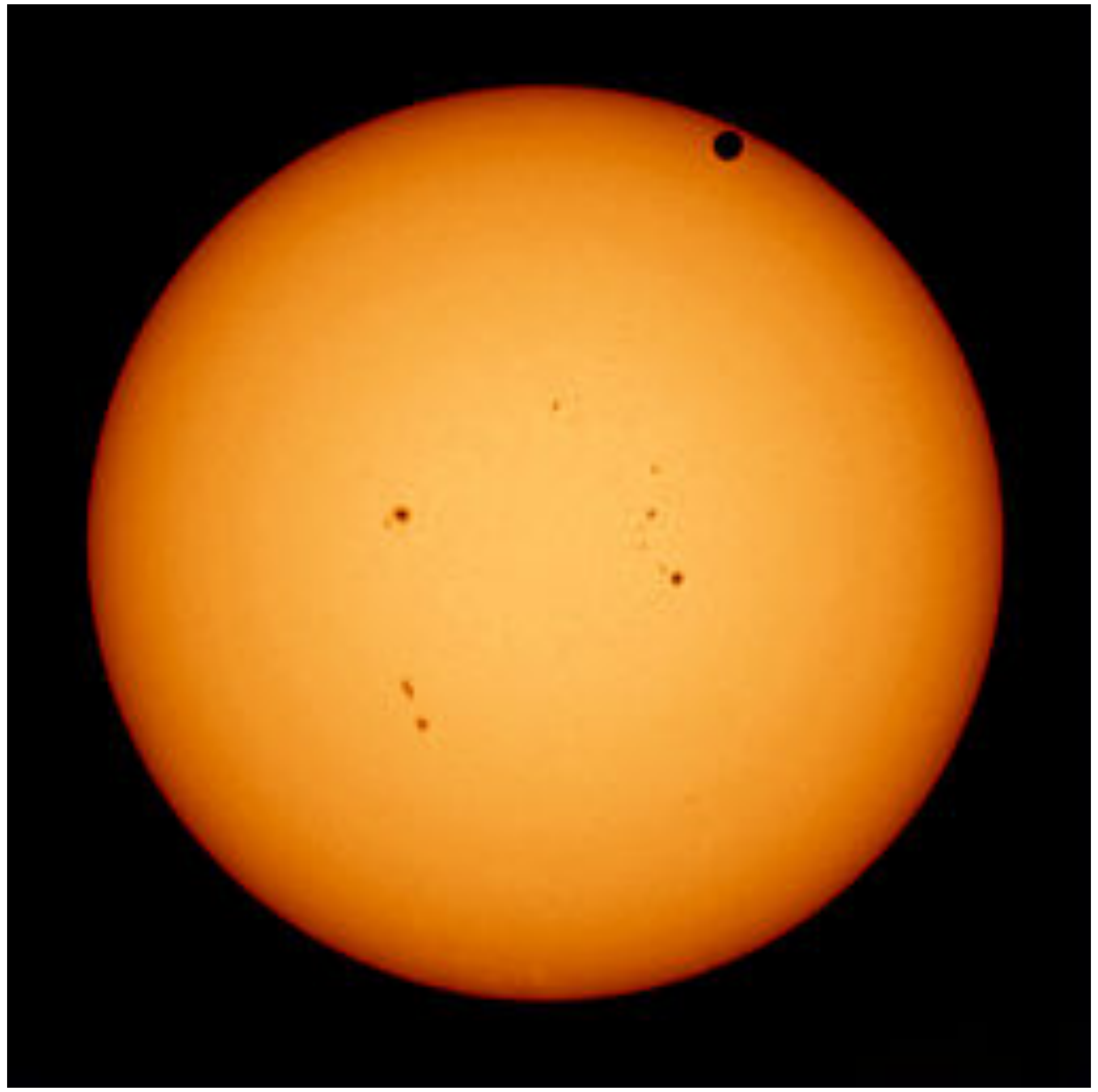
$$I_\nu(0{,}\mu) = \int_0^\infty dx\ (a_0 + a_1 \mu x + \dots)\ e^{-x} \ \approx a_0 + a_1 \mu$$

$$\therefore \ \boxed{I_\nu(0{,}\mu) \approx S_\nu(\tau_\nu = \mu)}$$

- Esta es la llamada aproximación de Eddington-Barbier. Me dice que en una atmósfera plano-paralela, la intensidad proveniente de un cierto ángulo de inclinación es igual a la función fuente a una profundidad óptica igual al coseno de dicho ángulo.

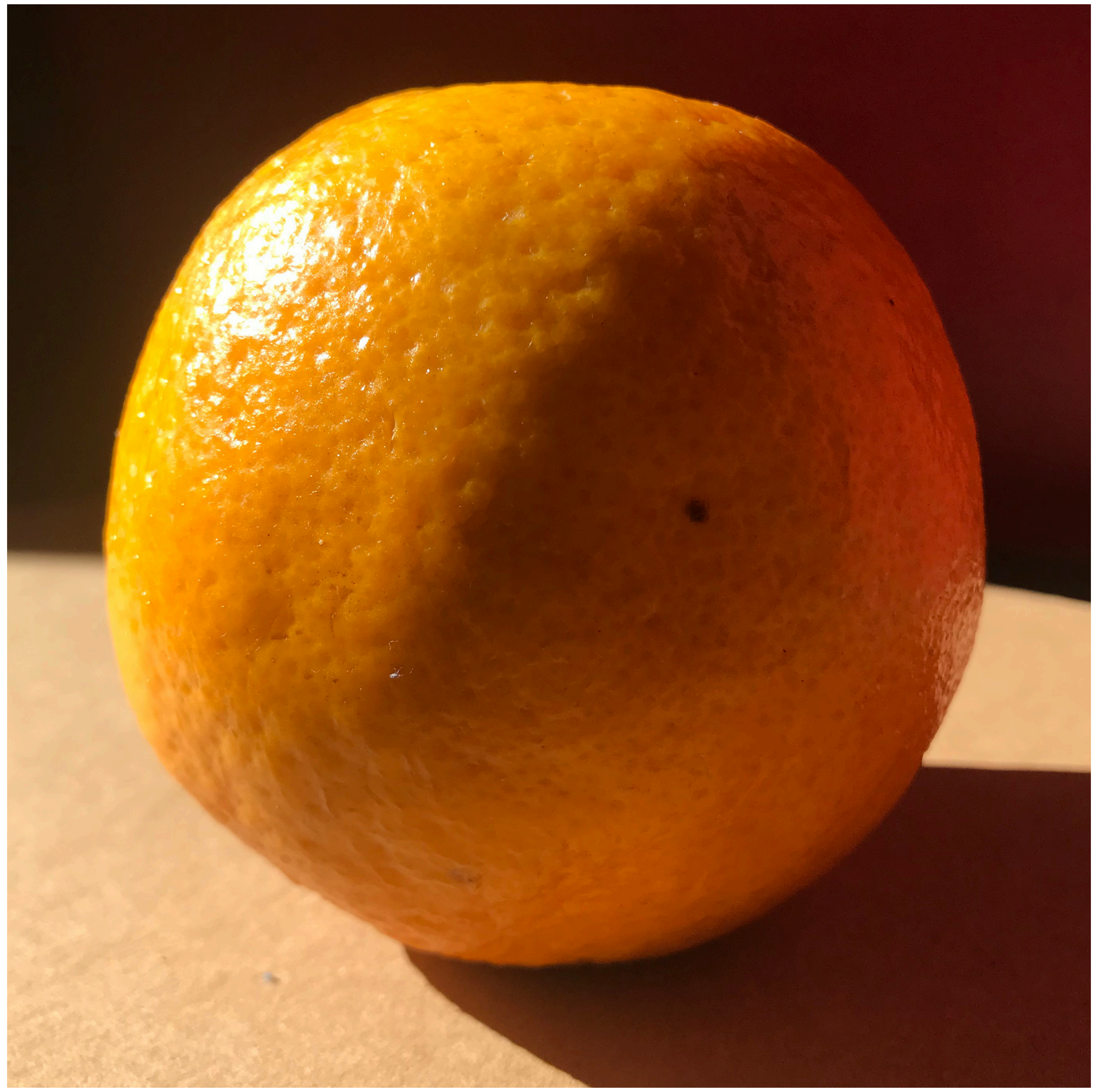
Limb darkening

El Sol es una esfera de gas incandescente que en luz blanca exhibe una periferia (limbo) relativamente mas oscura que su centro. Este fenómeno se conoce como **limb darkening** (oscurecimiento del limbo).



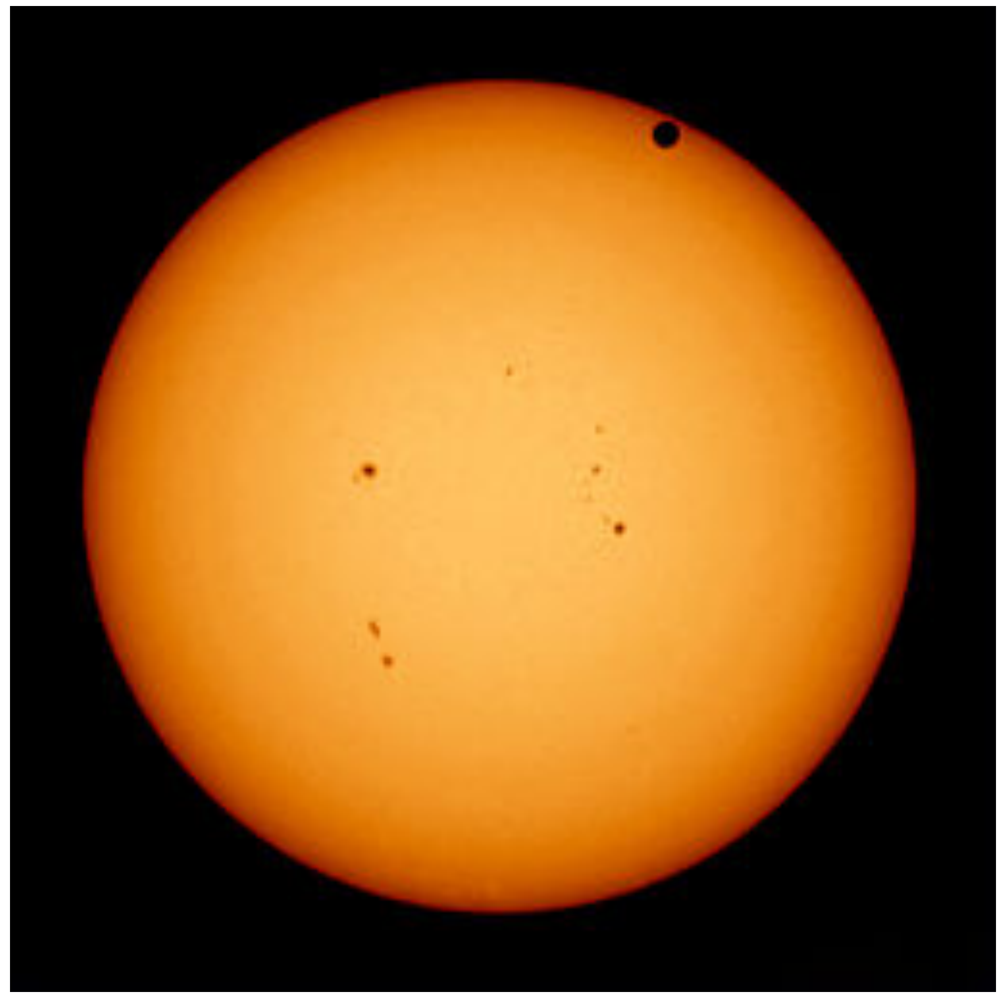
- Imágen del Sol en luz blanca mostrando el efecto de limb darkening.
- Se observan tambien varias manchas solares y el tránsito de Venus.

- Naturaleza muerta (Gomez 2020).
- Naranja con fuente luminosa desde el observador.



- Naranja con fuente luminosa desde el lateral izquierdo.

Limb darkening



Una de las aplicaciones de la aproximación de Eddington-Barbier, es la explicación del fenómeno de **limb darkening** (oscurecimiento del limbo) en el Sol

$$\frac{I_{limbo}}{I_{centro}} = \frac{I(\mu=0)}{I(\mu=1)} = \frac{S(\tau=0)}{S(\tau=1)} \quad \text{según Eddington - Barbier}$$

$$S(\tau=\mu) = a + b\mu = S(0) + \left.\frac{dS}{d\tau}\right|_0 \mu \longrightarrow \frac{I_{limbo}}{I_{centro}} = \frac{S(0)}{S(0) + \left.\frac{dS}{d\tau}\right|_0}$$

Tendremos oscurecimiento en el limbo ($I_{limbo} < I_{centro}$) siempre que $\left.\frac{dS}{d\tau}\right|_0 > 0$

Supongamos ETL (equilibrio termodinámico local). Es decir

$$S \approx B_\nu(T) \qquad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \; : \text{ función de Planck}$$

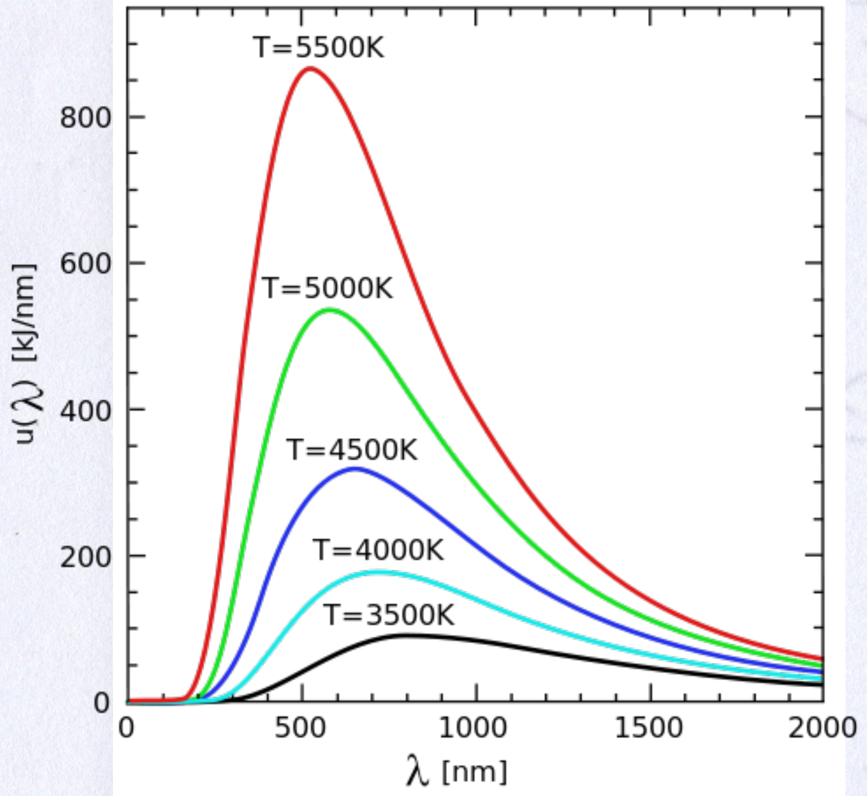
con $T = T(\underset{\sim}{r})$

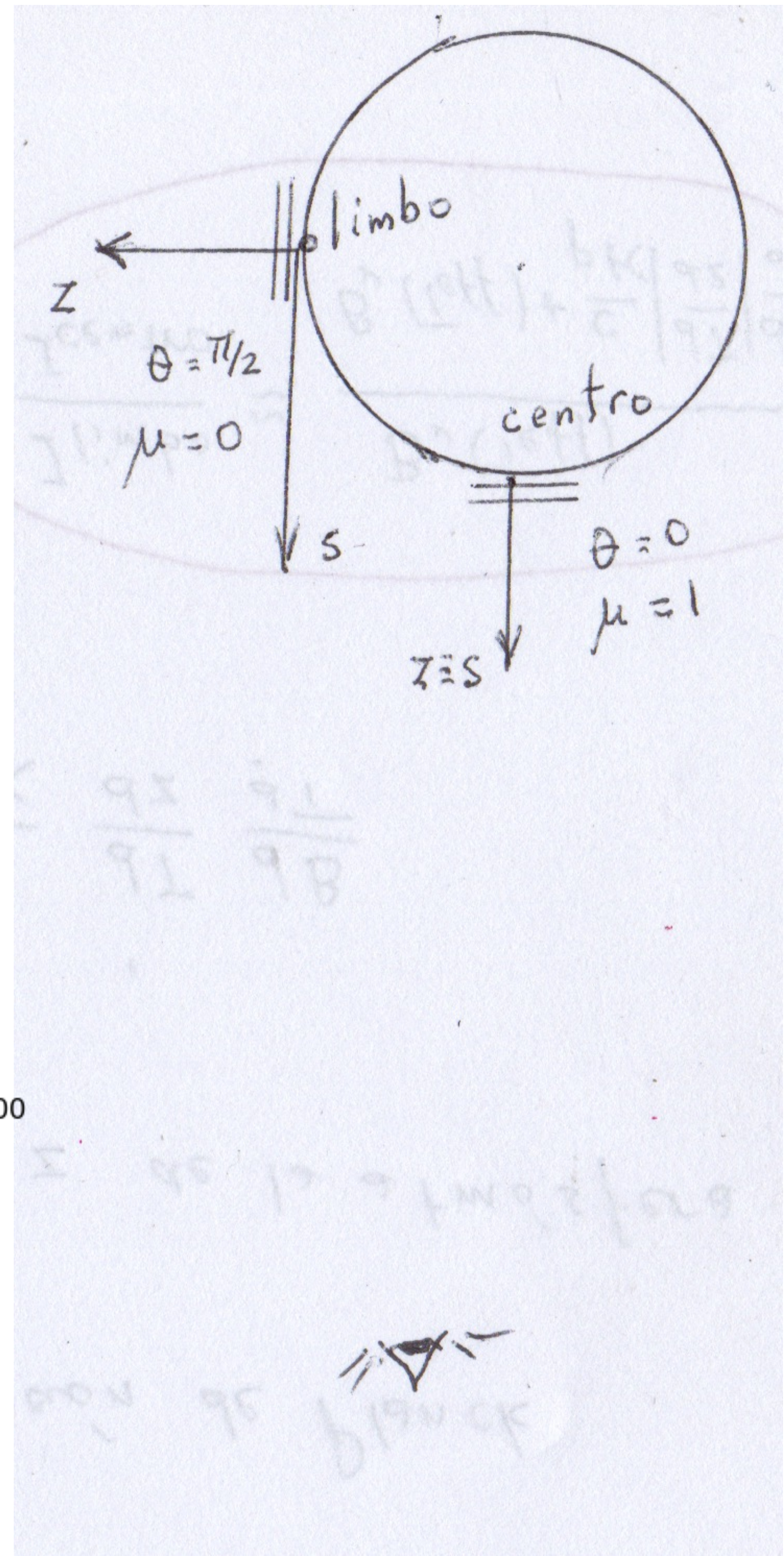
Como $B_\nu = B_\nu(T(\tau(z)))$, es decir, suponemos que a cada altura z de la atmósfera solar (que corresponde a un τ) hay una temperatura T

$$\frac{dB}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau}\frac{dB}{dT} \xrightarrow[\text{(atmósfera plano-paralela)}]{d\tau = -\frac{\rho K}{c}dz} \frac{dB}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau}\frac{dT}{dz}\frac{dB}{dT} = -\frac{c}{\rho K}\frac{dT}{dz}\frac{dB}{dT}$$

- $\frac{dB}{dT} > 0 \quad \forall \nu, T$ (verificar)
- $\frac{dT}{dz} < 0$ en la fotósfera $T(z)$ decreciente

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dB}{dT} > 0 \\ \frac{dT}{dz} < 0\end{array}\right\} \frac{dB}{d\tau} > 0 \longrightarrow \frac{I_{limbo}}{I_{centro}} \approx \frac{B_\nu(T_{eff})}{B_\nu(T_{eff}) + \frac{c}{\rho K}\left|\frac{dT}{dz}\right|\frac{dB}{dT}} < 1$$





Aproximación de difusión

- Si materia y radiación pueden suponerse en **equilibrio termodinámico**, entonces la intensidad $I_\nu(\underline{r}, \Omega, t)$ debe resultar independiente de $\underline{r}$ (homogeneidad), de Ω (isotropía) y del tiempo (estacionareidad), y su dependencia con la frecuencia estará dada por la función de Planck:

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = S_\nu \quad , T = cte$$

- Esta desde luego es una aproximación excesiva para una atmósfera estelar, ya que por lo pronto es T = T ($\underline{r}$)
- Supongamos entonces que los gradientes de temperatura son suaves, de modo que $|\frac{T}{\underline{\nabla} T}| \gg \lambda_\nu$, aproximación a la que denominamos equilibrio termodinámico local (ETL).
- La ecuación de transporte estacionaria es $c\hat{n} \cdot \nabla I_\nu = \rho\kappa_\nu(S_\nu - I_\nu)$

que podemos reescribir como

$$\boxed{I_\nu = S_\nu - \frac{c}{\rho\kappa_\nu}\hat{n} \cdot \nabla I_\nu}$$

- Esta forma de la ecuación sugiere que se puede intentar un proceso iterativo para obtener I_ν en la aproximación ETL.
- Para ello, debemos aproximar en el lado derecho de la ecuación $S_\nu \approx B_\nu(T) \approx I_\nu$, de modo que el primer término corresponde a un equilibrio termodinámico estricto, mientras que el segundo considera la correccion por gradientes suaves.
- Noten que $\frac{c}{\rho\kappa_\nu}\hat{n} \cdot \nabla = \lambda_\nu \hat{n} \cdot \nabla \ll 1$ en la aproximación ETL.

Aproximación de difusión

- Una vez conocido I_ν, podemos calcular los primeros momentos (recuerden que $I_\nu \propto f_\nu$):

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu \, d\Omega \quad (\text{órden } \phi) \quad \text{intensidad media}$$

$$\underset{\sim}{q}_\nu = \oint I_\nu \, \hat{n} \, d\Omega \quad (\text{órden } 1) \quad \text{flujo de radiación}$$

$$P_{\nu,ij} = \frac{1}{c} \oint I_\nu \, n_i n_j \, d\Omega \quad (\text{órden } 2) \quad \text{presión de radiación}$$

- Podemos calcular estos momentos en la aprox. difusión

$$I_\nu = B_\nu(T) - \frac{c}{\rho K_\nu} \hat{n} . \underset{\sim}{\nabla} T \, \frac{dB_\nu}{dT}$$

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint B_\nu \, d\Omega - \frac{c}{\rho K_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \underset{\sim}{\nabla} T \cdot \oint \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{n}$$

- <u>Verifiquen</u> que $\oint \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{n} = 0$ usando que

$$d\Omega = d\varphi \, d\theta \sin\theta$$

$$\hat{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

Entonces $J_\nu \simeq B_\nu$

$$\underset{\sim}{q}_\nu = B_\nu \underbrace{\oint d\Omega \, \hat{n}}_{=0} - \frac{c}{\rho K_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \underset{\sim}{\nabla} T \cdot \oint d\Omega \, \hat{n} \, \hat{n}$$

- <u>Verifiquen</u> que la integral resulta

$$\oint d\Omega \, n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$$

y entonces

$$\underset{\sim}{q}_\nu = - \frac{4\pi c}{3 \rho K_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \underset{\sim}{\nabla} T$$

- Como $B_\nu(T)$ es creciente con T (para todo ν) resulta que el flujo de radiación es proporcional a $-\underset{\sim}{\nabla} T$, tal como la <u>conducción de calor</u> en sólidos (ley de Fourier): $\underset{\sim}{q} = -K \underset{\sim}{\nabla} T$.
- Según esta ley, hay un flujo de radiación de regiones calientes a regiones mas frías, lo cual es consistente con la 2da ley de termodinámica.