Clase anterior

- Medio interestelar: gas tenue y polvo.

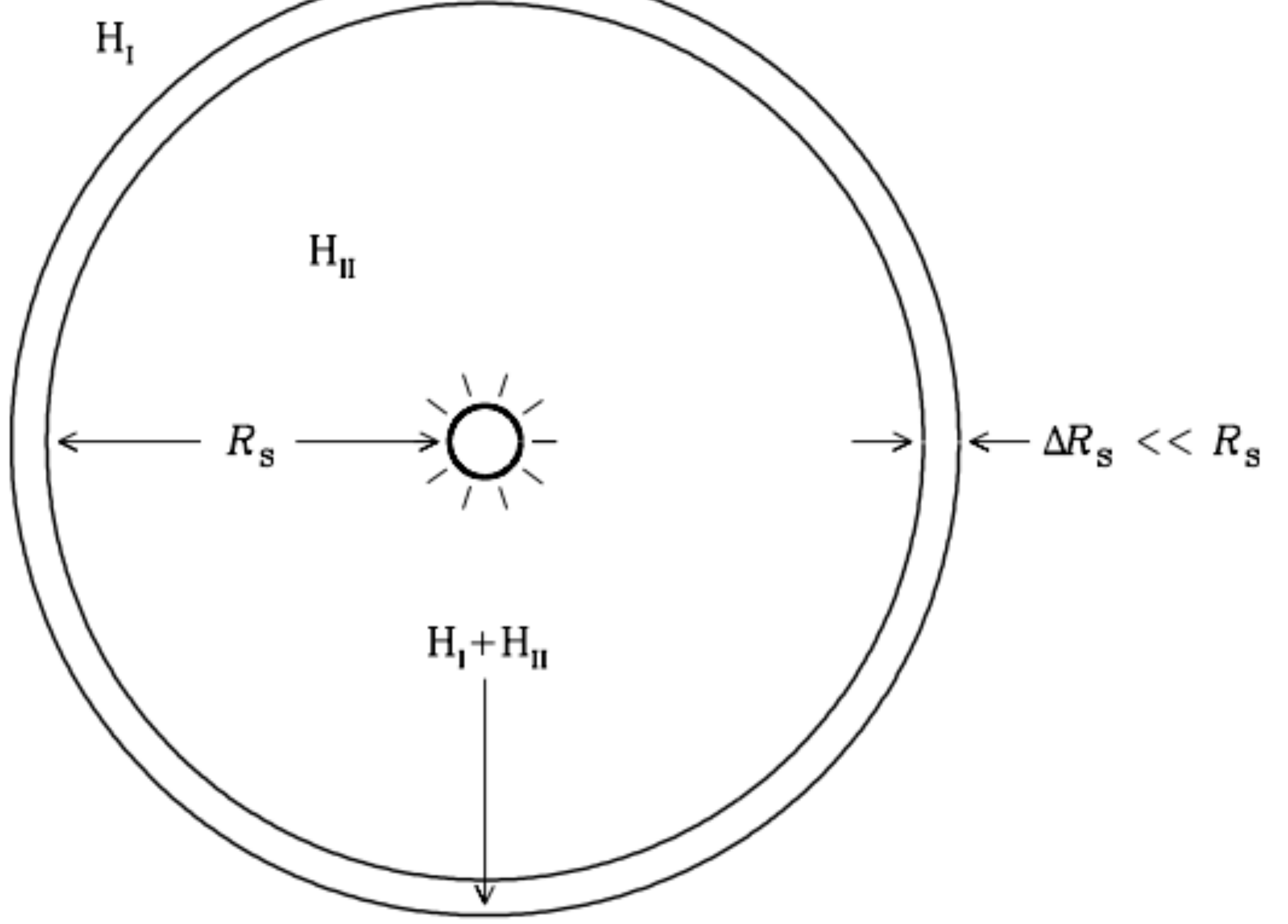
- Nubes moleculares: regiones de formación estelar.

- Regiones HII alrededor de estrellas calientes.

- Modelo estático de Stromgren para regiones HII.

- Cálculo del radio de Stromgren (ver Harwitt 2006, Astrophysical Concepts, cap. 9)

Modelo estático de Stromgren



- En el modelo de Stromgren, el radio R(t) de la región HII satisface:

$$\dot{N} \;=\; 4\pi R^2 n_H \frac{dR}{dt} \;+ \frac{4}{3}\pi R^3 n_H^2 \alpha_{eff}$$

- La solución de esta ecuación diferencial es:

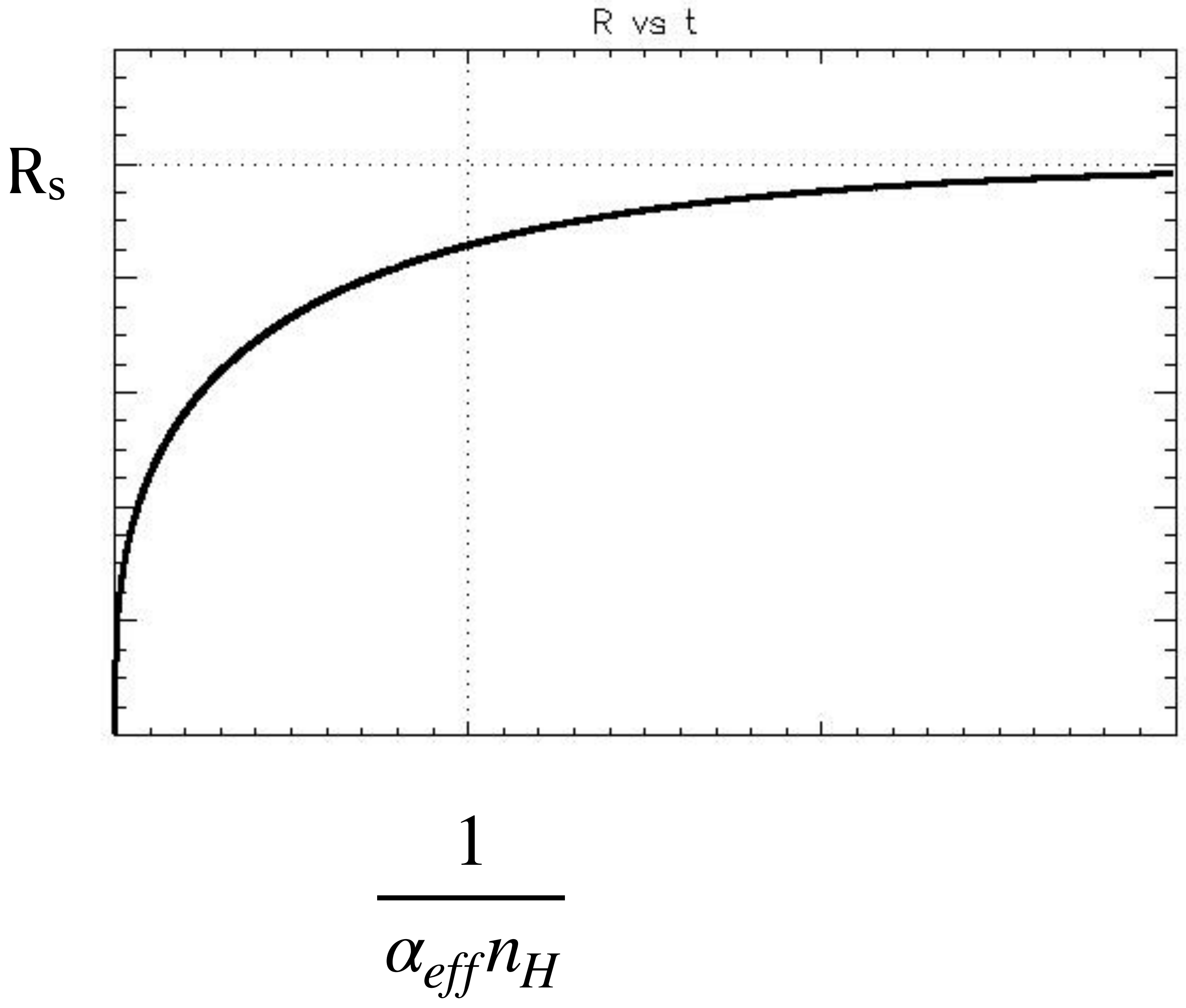
$$R(t) = R_s \;(1 - e^{-\alpha_{eff} n_H t})^{1/3} \quad \text{donde} \qquad R_s = (\frac{3\dot{N}}{4\pi n_H^2 \alpha_{eff}})^{1/3}\text{: radio de Stromgren}$$

- De esta solución surge que en las etapas iniciales de vida de la estrella central, la región HII crece como $R(t) \;\approx t^{1/3}$

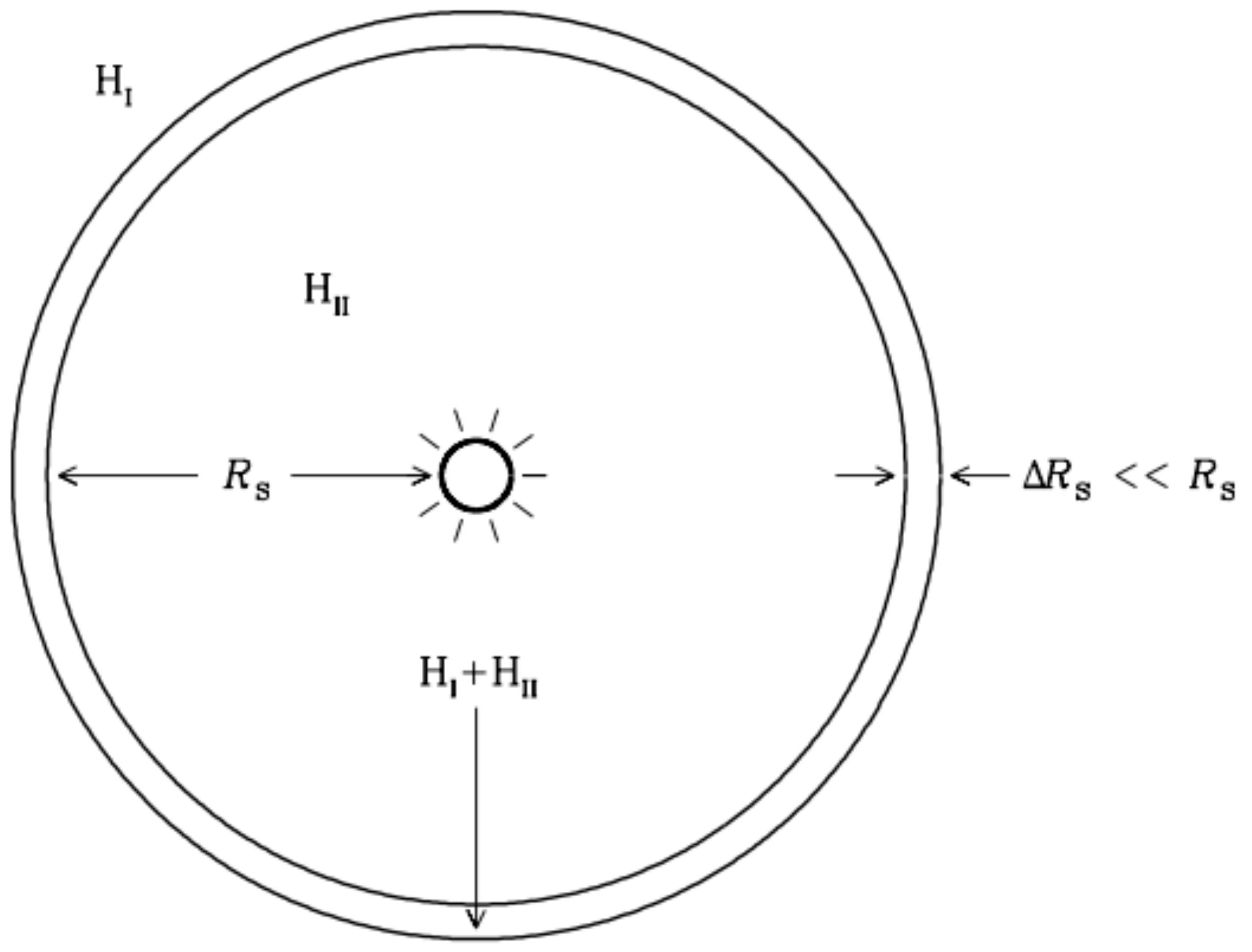
- Pasados unos 10000 años, se alcanza un radio de equilibrio R_s donde todos los fotones emitidos son re-absorbidos en la esfera.

- Este planteo no considera que el gas en la región HII tiene mayor presión y mayor temperatura que en la región HI circundante.

- Solo estamos considerando un **frente de ionización** en R(t), pero el salto de presión y temperatura presupone la aparición de un **frente de choque**.



Formación de onda de choque



- Veamos que la diferencia de presiones en la interfase entre HI y HII lleva inevitablemente a la formación de un choque supersónico.

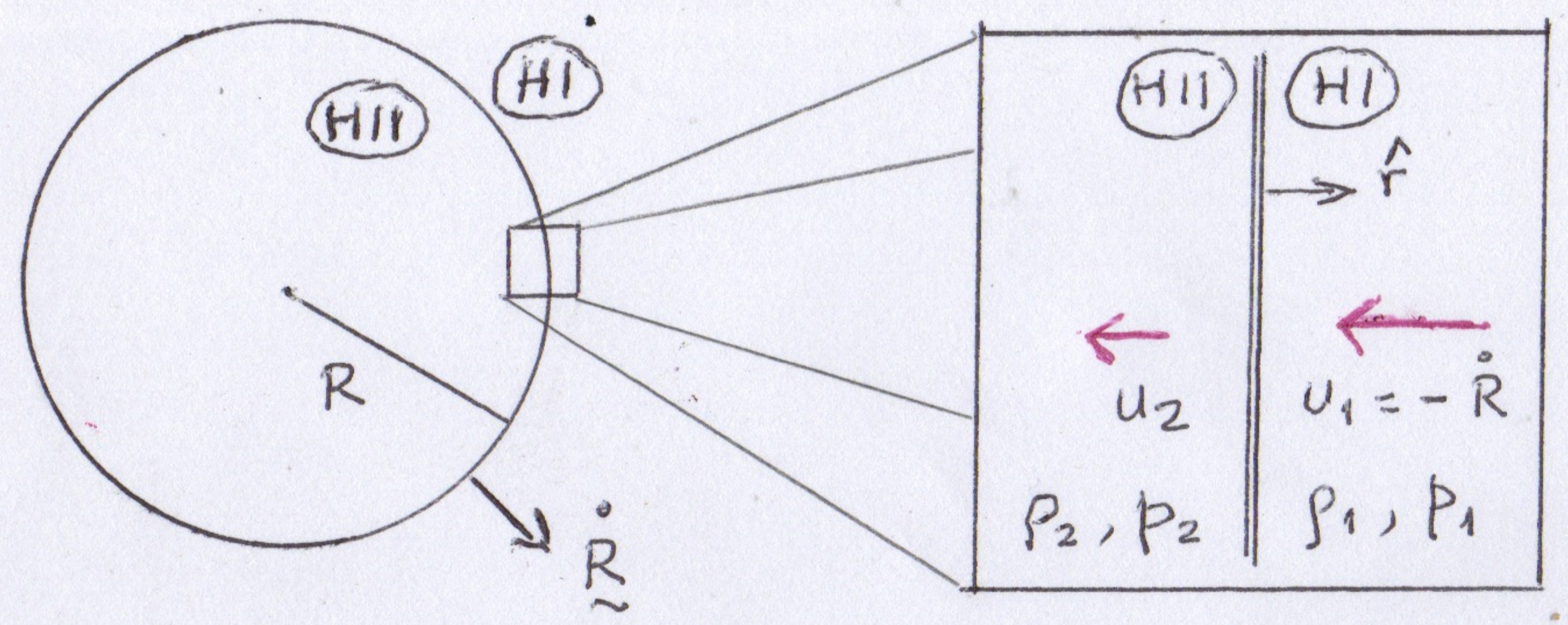
$$\rho \ddot{R} \approx \frac{p}{\Delta R}$$

- Usando que la velocidad del sonido se define como $c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ tenemos

$$\rho \ddot{R} \approx \frac{\rho c_s^2}{\Delta R}$$

- De esta expresión podemos obtener un tiempo característico $\Delta t \approx (\frac{R\ \Delta R}{c_s^2})^{1/2}$
- De aqui podemos estimar la velocidad de expansión del frente, dada por $\dot{R} \approx \frac{R}{\Delta t}$ de lo cual surge que $\frac{\dot{R}}{c_s} \approx \sqrt{\frac{R}{\Delta R}} \gg 1$
- Es decir que el frente se expande en forma supersónica en una atmósfera estática de HI.
- Planteamos entonces que en la interfase no solo hay un cambio en el estado de ionización del gas, sino tambien en otras variables del fluido como densidad, presión y temperatura.
- Es decir, que debemos plantear las c**ondiciones de Rankine-Hugoniot** en la interfase.

Condiciones de Rankine-Hugoniot



- Ampliamos una pequeña porción de la interfase y nos ponemos en el referencial donde la interfase se encuentra en reposo.
- El medio HI está caracterizado por ρ_1, p_1 y $u_1 = -\dot{R}$
- El medio HII por ρ_2, p_2 y u_2.
- Las condiciones R-H surgen de integrar las ecuaciones de masa, impulso y energía en un volumen de Gauss que cruza la interfase.

- Las ecuaciones R-H son:

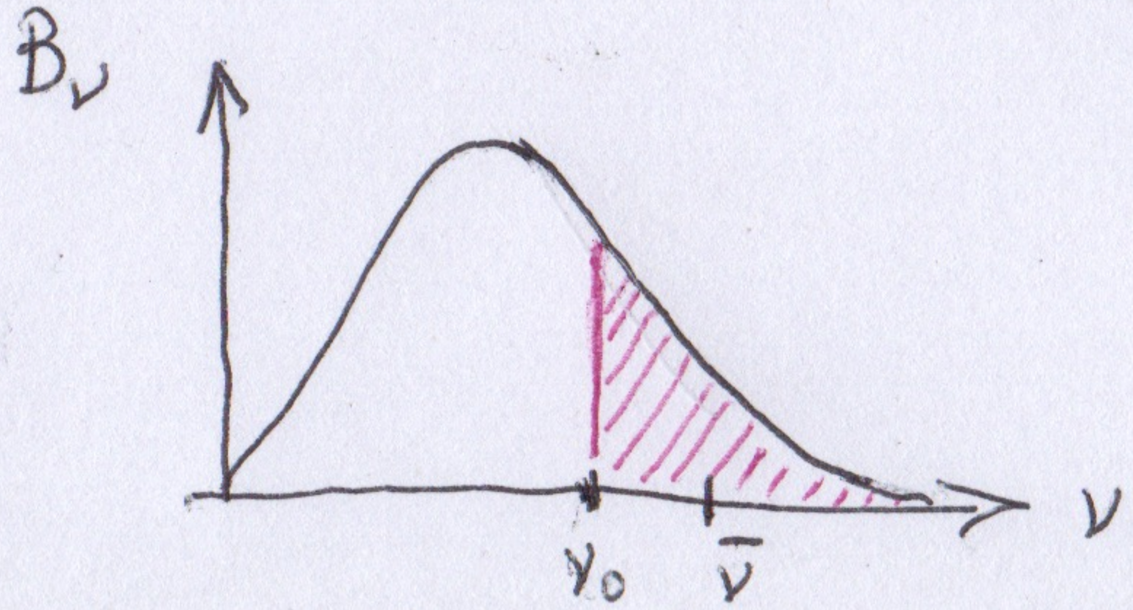
masa: $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = I$ I: flujo de masa

impulso: $p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$

energía: $Q + \frac{u_1^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{p_2}{\rho_2}$

- Son las expresiones R-H habituales, salvo por Q, que es la energía radiativa que aportan los fotones ionizantes:

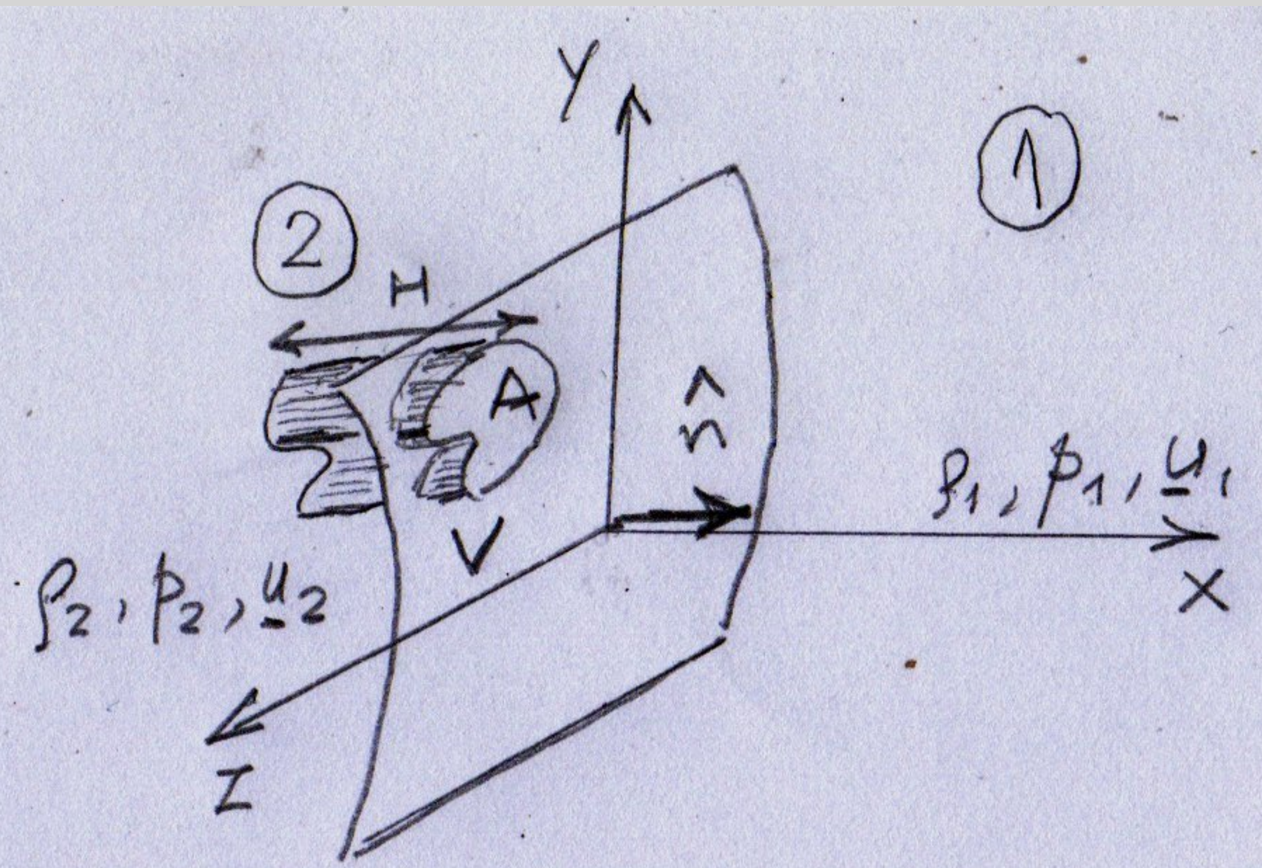
$$Q = \frac{h(\bar{\nu} - \nu_0)}{m_H} \qquad \bar{\nu} = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} d\nu\, \nu B_\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} d\nu\, B_\nu}$$



Repaso de E1: Rankine-Hugoniot 1

Una vez formada la superficie de discontinuidad o choque, a uno y otro lado tenemos recintos donde las variables que describen el estado del fluido ($\rho(\underline{r}, t),\ p(\underline{r}, t),\ \underline{u}(\underline{r}, t)$) evolucionan en forma contínua y derivable. Pero que ecuaciones se cumplen en el choque, donde las derivadas no están definidas ?

Flujo de masa



- En el referencial fijo al choque, vemos un medio ① caracterizado por $\rho_1, p_1, \underline{u}_1$ y un medio ② dado por $\rho_2, p_2, \underline{u}_2$.

- Integramos la ecuación de continuidad en el pequeño cilindro de volumen $V = A \cdot H$:

$$\int_V \partial_t \rho \, d^3r = -\int_V \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) \, d^3r = -\oint_{S_V} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}$$

La superficie S_V tiene caras S_1, S_2 y S_{lat}.

Por lo tanto :

$$\underbrace{\int_V d^3r \, \partial_t \rho}_{\xrightarrow{H \to 0}\ 0} = -\underbrace{\iint_{S_{lat}} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}}_{\xrightarrow{H \to 0}\ 0} - \iint_{S_1} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}_1 - \iint_{S_2} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}_2$$

Como $\left. \begin{array}{l} d\underline{S}_1 \simeq A \hat{n} \\ d\underline{S}_2 \simeq -A \hat{n} \end{array} \right\} \longrightarrow -\rho_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} A + \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n} A = 0$

Si definimos $[\![F]\!] = F_2 - F_1$

$$[\![\rho \underline{u} \cdot \hat{n}]\!] = 0 \quad \text{RH1}$$

Primera relación de Rankine-Hugoniot

Esta expresión establece que el flujo de masa que ingresa al choque desde un medio, es igual al que egresa por el otro. Es decir que en el choque no se crea ni destruye masa.

Repaso de E1: Rankine-Hugoniot 2

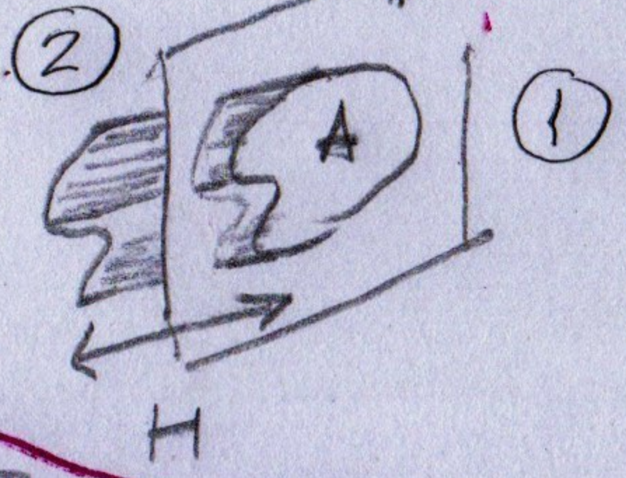
Flujo de impulso lineal

Para un fluido ideal, vimos que combinando las ecuaciones de continuidad y de Euler se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0 \\ \rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = -\nabla p \end{array}\right\} \rightarrow \partial_t(\rho \underline{u}) = -\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\Pi}}$$

$\underline{\underline{\Pi}} = p\,\underline{\underline{1}} + \rho\,\underline{u}\,\underline{u}$: flujo de impulso

Integrando ahora esta ecuación en el cilindro de volumen V, obtenemos para $H \rightarrow 0$:



$$[\![\underline{\underline{\Pi}}\cdot\hat{n}]\!] = 0 \rightarrow [\![\rho \underline{u}\,\underline{u}\cdot\hat{n} + p\,\hat{n}]\!] = 0 \qquad \text{RH2}$$

Llamamos RH2 a esta relación vectorial, que expresa la conservación de impulso lineal al atravesar el choque.

Flujo de energía

Para un flujo compresible y adiabático, la densidad de energía es

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\text{energía interna}}{\text{masa}}$$

Por el Primer Principio de la Termodinámica:

$$d\varepsilon = \delta Q - p\,dV = \delta Q - p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

En el caso adiabático:

$$\left.\begin{array}{l} \delta Q = 0 \\ p = K\rho^{\gamma} \end{array}\right\} \rightarrow d\varepsilon = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho = K\rho^{\gamma-2}\,d\rho = d\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right]$$

Entonces: $\varepsilon = \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}$

La variación de energía del fluido es:

$$\partial_t\left(\rho\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) = \frac{u^2}{2}\partial_t \rho + \rho\,\underline{u}\cdot\partial_t \underline{u} + \frac{1}{\gamma-1}\partial_t p$$

Repaso de E1: Rankine-Hugoniot 3

$$\therefore\ \partial_t\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)=-\frac{u^2}{2}\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})-\underline{u}\cdot\left[\rho(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}+\underline{\nabla}p\right]+$$
$$+\frac{K\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}\partial_t\rho$$

$$\partial_t\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)=-\underline{\nabla}\cdot\left(\frac{\rho u^2}{2}\underline{u}\right)-\underline{u}\cdot\underline{\nabla}p-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})$$

En el último término:

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\left(\rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u}+\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\rho\right)=-\frac{\gamma}{\gamma-1}p\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u}-\frac{1}{\gamma-1}\underline{u}\cdot\underline{\nabla}p$$

en síntesis:

$$\partial_t\underbrace{\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)}_{\text{densidad de energía}}=-\underline{\nabla}\cdot\underbrace{\left[\frac{\rho u^2}{2}\underline{u}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\underline{u}\right]}_{\text{flujo de energía}}$$

Entonces, integrando en el volumen $V=A\cdot H$,

en el límite $H\to 0$

$$[\![\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\right)\underline{u}\cdot\hat{n}]\!]=0 \qquad \text{RH3}$$

Entonces, pese a que las variables no son derivables en la superficie de discontinuidad, deben satisfacerse las relaciones de Rankine-Hugoniot, que son expresiones integrales de las ecuaciones y funcionan como condiciones de contorno de una interfase interna del fluido.

$$\boxed{\begin{array}{l}[\![\rho\,\underline{u}\cdot\hat{n}]\!]=0\\ [\![\rho\underline{u}\,\underline{u}\cdot\hat{n}+p\hat{n}]\!]=0\\ [\![\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\right)\underline{u}\cdot\hat{n}]\!]=0\end{array}}$$

Rankine Hugoniot

Rankine-Hugoniot sin ionización

- El flujo de partículas $\frac{I}{m_H}$ que cruza la interfase debe ser igual al flujo de fotones $J = \frac{\dot{N}}{4\pi R^2}$, ya que cada HI atrapa un fotón y se transforma en HII.
- Entonces:

$$\frac{I}{m_H} = J = \frac{\dot{N}}{4\pi R^2} = J_* \frac{R_*^2}{R^2}$$

- Para resolver R-H, definimos el contraste de densidad $\psi = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ y buscamos escribir ρ_2, p_2, u_2 en términos de ρ_1, p_1, u_1 (suprimo el subíndice 1)

$$\rho_2 = \rho\psi \qquad y \qquad u_2 = \frac{u}{\psi}$$

$$p_2 = p + \rho u^2\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)$$

- Reemplazando en la ecuación para energía

$$\boxed{(2Q + u^2 + 3c^2)\psi^2 - (5u^2 + 3c^2)\psi + 4u^2 = 0}$$

donde $c^2 = \frac{5}{3}\frac{p}{\rho}$ y las incógnitas son ψ, u.

Veamos primero el caso de un choque <u>sin ionización</u> (es decir, un choque hidrodinámico tradicional)

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0 \\ u \gg c \text{ (muy supersónico)} \end{array}\right\} \rightarrow \psi^2 - 5\psi + 4 = 0$$

$$\psi = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \quad \begin{array}{l} \nearrow \psi_- = 1 \\ \searrow \psi_+ = 4 \end{array}$$

$\psi_- = 1$: solución trivial $\rightarrow$ <u>no hay choque</u>

$\psi_+ = 4$: choque fuerte $\rightarrow$

$$\rho_2 = 4\rho_1$$

$$u_2 = u_1/4$$

$$p_2 = p_1 + \frac{3}{4}\rho_1 u_1^2 \gg p_1$$

- Aumenta fuertemente la presión, y el flujo se vuelve subsónico

$$\frac{u_2^2}{c_2^2} = \frac{(u_1/4)^2}{\frac{5}{3}\frac{p_2}{\rho_2}} \approx \frac{1}{5} < 1 \quad \text{(verificarlo)}$$

Rankine-Hugoniot con ionización

- En regiones HII desde luego es $Q \neq 0$
En la ecuación cuadrática para ψ, exigimos que $\psi \in \mathbb{R}$

$$a\psi^2 + b\psi + c = 0 \longrightarrow b^2 - 4ac \geq 0$$

que resulta
$$(c^2 - u^2)^2 \geq \frac{32Q}{9} u^2$$
(verifiquenlo)

- Esta desigualdad se satisface en dos casos posibles: $u > c$ y $u < c$.

(i) <u>Supersónico (o tenue)</u>

$$u > c \longrightarrow u^2 - c^2 \geq \frac{4}{3}\sqrt{2Q}\, u \longrightarrow u^2 - \frac{4\sqrt{2Q}}{3} u - c^2 \geq 0$$

$$\therefore u \geq u_T = \frac{2}{3}\sqrt{2Q} + \sqrt{\frac{8}{9}Q + c^2}$$

Supongamos tener una estrella muy brillante (Q alto) y HI muy frío (c bajo), es decir

$$\frac{8Q}{9} \gg c^2$$

En ese límite
$$u \geq u_T \simeq \frac{4}{3}\sqrt{2Q}$$

- Esta solución requiere que la velocidad $u = |\dot{R}|$ supere el umbral u_T. Esto a su vez requiere que el flujo de fotones supere un umbral

$$J = \frac{I}{m_H} = \frac{\rho u}{m_H} = n u \longrightarrow J \geq J_T = n_1 u_T$$

Es decir que
$$n_1 \leq \frac{J}{u_T} = \frac{J_* (R_*/R)^2}{u_T}$$

solución tenue

$$J_* = \frac{\dot{N}}{4\pi R_*^2} \qquad u_T = \frac{4}{3}\sqrt{2Q}$$

- Si bien esta rama puede existir inicialmente ($R \sim R_*$), eventualmente se alcanzará un radio R_{crit} para el cual dejará de existir

$$n_1 = \frac{J_*}{\frac{4}{3}\sqrt{2Q}} \left(\frac{R_*}{R_{crit}}\right)^2$$

Rankine-Hugoniot con ionización

(ii) Subsónico (o denso)

Analicemos la otra rama de la desigualdad

$$u < c \longrightarrow c^2 - u^2 \geq \frac{4}{3}\sqrt{2Q}\,u \longrightarrow u^2 + \frac{4}{3}\sqrt{2Q}\,u - c^2 \leq 0$$

$$\therefore \quad u \leq u_D = -\frac{2\sqrt{2Q}}{3} + \sqrt{\frac{8Q}{9} + c^2}$$

Aquí la velocidad debe estar por debajo de un valor tope. Lo mismo ocurrirá con el flujo de fotones J. En el límite de estrellas muy brillantes con HI frío:

$$\frac{8Q}{9} >> c^2 \longrightarrow J \leq n_1 u_D \longrightarrow n_1 \geq \frac{J}{u_D}$$

$$u_D \simeq \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{Q}}\,c^2 \longrightarrow n_1 \geq \frac{J_*}{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{Q}}\,c^2}\left(\frac{R_*}{R}\right)^2$$

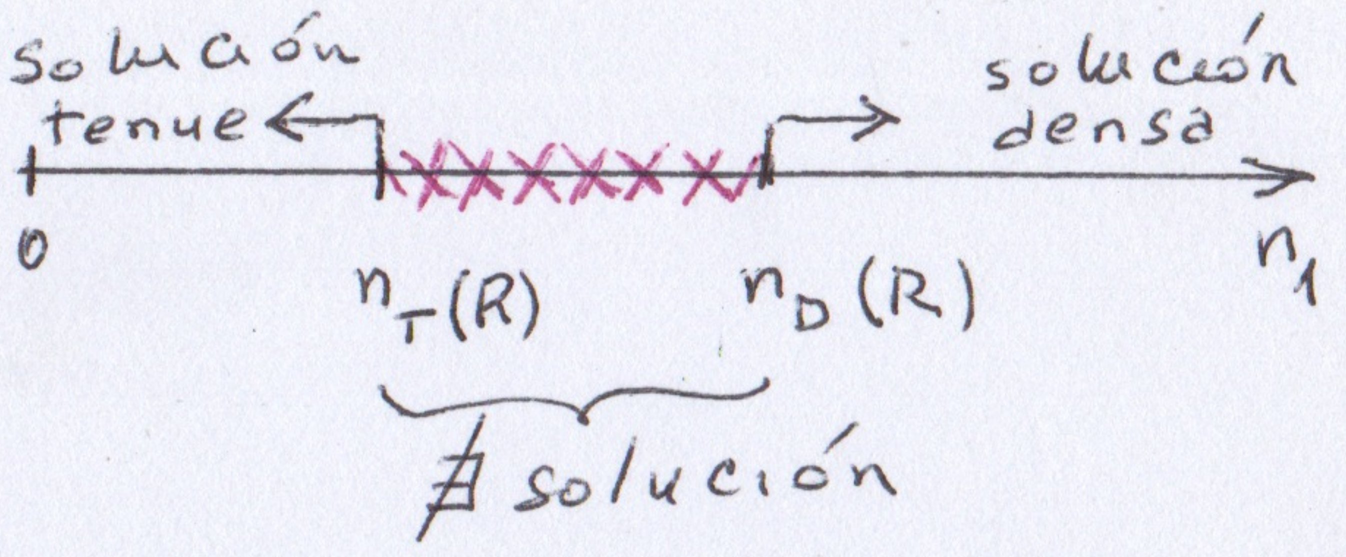
(verificarlo)

solución densa

Si comparamos los umbrales n_T y n_D:

$$\frac{n_T}{n_D} = \frac{u_D}{u_T} = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{Q}}\,c^2}{4\sqrt{2Q}/3} = \frac{9c^2}{32Q} << 1$$

Es decir que:



Interpretación

- Al encenderse la estrella, hay suficientes fotones para satisfacer $J > J_T \longrightarrow$ solución tenue.
- Como $J = J_*\left(\frac{R_*}{R}\right)^2$, eventualmente la desigualdad dejará de cumplirse para $R = R_{crit}$.
- En la etapa tenue

$$\left.\begin{aligned} J &= n_1 u_1 = n_1 \dot{R} \\ J &= \frac{\dot{N}}{4\pi R^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \dot{N}\,dt = 4\pi R^2 n_1\,dR$$

$$R(t) \sim t^{1/3}$$

- Podemos entonces estimar el tiempo para alcanzar R_{crit}: $t_{crit} \sim \frac{1}{8(2Q)^{3/4}}\left(\frac{3\dot{N}}{4\pi n_1}\right)^{1/2}$ (chequear)

Rankine-Hugoniot con ionización

- Cuando se alcanza R_{crit}, el número de fotones resulta insuficiente y entonces el **frente de ionización** se detiene.
- Pero el **choque hidrodinámico** sigue avanzando en el hidrógeno neutro (HI). En la interfase entre HII y HI chocado, al ser éste mas denso, tal vez se den las condiciones para establecer la solución densa (Harwitt 2006, Astrophysical Concepts, cap. 9).