

Clase anterior

- Formación estelar. Colapso gravitatorio. Tiempo de caída libre $t_{ff} \approx \frac{1}{\sqrt{G \rho_0}}$
- Efecto de temperatura finita. Ondas acústicas e inestabilidad de Jeans.
- Procesos de fusión nuclear. Ciclo P-P y ciclo CNO.
- Interiores estelares. Ecuaciones de equilibrio con simetría esférica →
- Leyes de escala. Temperatura de fusión.
- Relación masa-luminosidad.



Interiores estelares

Las ecuaciones que describen el equilibrio de los interiores estelares son las siguientes:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM(r)}{r^2} = 0$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r)$$

El balance de energía:

$$\frac{3}{2} n k_B \frac{dT}{dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{u} - \nabla \cdot \underline{q} + \rho \epsilon$$

$\partial_t = 0$ $\underline{u} = 0$

ϵ = producción de energía nuclear

$$[\epsilon] = \frac{E}{M \cdot T}$$

En esféricas $\nabla \cdot \underline{q} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q(r))$

Integrando la ecuación en una esfera de radio r :

$$L(r) = 4\pi r^2 q(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho \epsilon$$

$[L] = \frac{E}{T}$

$L(r)$ es la energía que cruza una superficie esférica de radio genérico r , tiempo

En estado estacionario, es igual a la energía nuclear liberada en su interior.

Suponemos que el flujo radial de energía $q(r)$ ocurre por radiación. En aproximación de difusión ($I_\nu = B_\nu - \frac{1}{\rho K_\nu} \underline{u} \cdot \nabla B_\nu$) y atmósfera gris ($K_\nu = K_{\text{Ross}}$)

$$q(r) = -\frac{16\sigma}{3\rho c K_{\text{Ross}}} T^3 \frac{dT}{dr}$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{K}^4 \cdot \text{s}}$$

(cte. Stefan-Boltzmann)

Por último, para estrellas normales suponemos que el gas es ideal

$$p = \rho \frac{k_B T}{m}$$

Sigue siendo una buena aproximación, aun para las densidades de núcleos estelares

$$\rho_0 \sim 150 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad n \sim 10^{26} \text{cm}^{-3}$$

Leyes de escala

- Las ecuaciones anteriores describen el equilibrio hidrostático de interiores estelares y proveen los perfiles $\rho(r)$, $p(r)$, $T(r)$, $q(r)$. Conocidos m , K_{Ross} y $E(p, T)$.

- Veamos que sin resolver las ecuaciones, podemos obtener leyes de escala para una estrella de masa M y radio R

$$M = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho \rightarrow M \sim \rho R^3$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{GM(r)}{r^2} = 0 \rightarrow \rho = \frac{\rho k_B T}{m} \sim \rho \frac{GM}{R}$$

$$L = 4\pi r^2 q(r) \rightarrow L \sim q R^2 \sim \frac{\sigma T^4 R}{\rho c K_R}$$

$$q = -\frac{16\sigma}{3\rho c K_R} T^3 \frac{dT}{dr}$$

- Notemos que $k_B T \sim \frac{GmM}{R}$. Es decir que al colapsar R disminuye y T aumenta.

- $E(T)$ es una función que crece fuertemente con T .

Esto hace que la fusión sea significativa solo a partir de una temperatura umbral T_* ($T_* \sim 2 \cdot 10^7 \text{ K}$)

- Una vez alcanzada T_* , el colapso alcanza un equilibrio, como una olla cuya presión mantiene la tapa levantada.

- Entonces

$$k_B T_* \sim \frac{GmM}{R} \rightarrow R \sim \frac{Gm}{k_B T_*} M$$

Las estrellas más masivas son más grandes

$$M \sim \rho R^3 \rightarrow \rho \sim \left(\frac{k_B T_*}{Gm} \right)^3 \frac{1}{M^2}$$

Las más masivas son menos densas

$$L \sim \frac{\sigma T^4 R}{\rho c K_R} \xrightarrow[\rho \sim M^{-2} \quad R \sim M]{L \sim M^3}$$

- Si en vez de la opacidad de Rosseland usamos la de Kramer $K_{kr} \sim K_0 \rho T^{-7/2}$

$$L \sim \frac{R}{\rho^2} \rightarrow L \sim M^5$$

Relaciones masa-luminosidad

Leyes de escala

La relación masa-luminosidad, entonces, podemos escribirla como

$$L \sim M^a$$

$a=3$ Rosseland ($K = \text{cte}$)

$a=5$ Kramers ($K = K_0 \rho$)

La temperatura que fijamos como $T = T_*$ es en el núcleo, donde tenemos fusión.

La temperatura en superficie es muy distinta, la asociamos con T_{eff} y la ley de Stefan-Boltzmann

$$q \sim \sigma T_{\text{eff}}^4 \sim \frac{L}{4\pi R^2}$$

Recordemos que T_{eff} , por definición, es la temperatura de un cuerpo negro que tenga la misma luminosidad que la estrella.
area

Entonces

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 \sim M^{a-2} \sim L^{\frac{a-2}{a}}$$

Por lo tanto $L \sim T_{\text{eff}}^{\frac{4a}{a-2}}$

Opacidad de Rosseland K_{ross}

$\rightarrow a=3 \rightarrow$

$$L \sim T_{\text{eff}}^{12}$$

Opacidad de Kramers $K = K_0 \rho$

$\rightarrow a=5 \rightarrow$

$$L \sim T_{\text{eff}}^{6.67}$$

$R = \text{cte}, \forall *$

$\rightarrow a = \infty \leftarrow$

$$L \sim T_{\text{eff}}^4$$

El resultado observacional es

$$L \sim T_{\text{eff}}^{4.5}$$

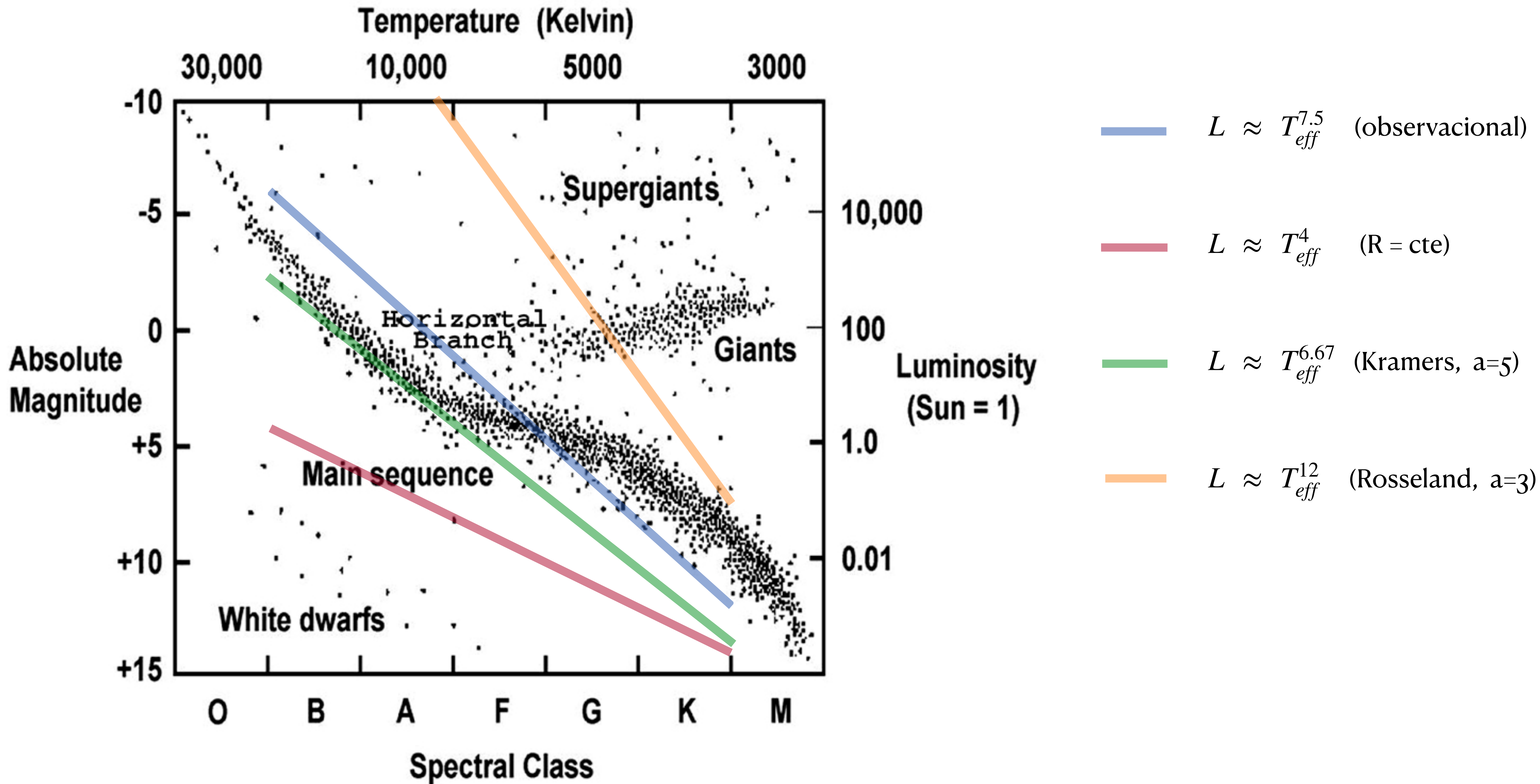
$a \sim 4.3$

En cuanto al tiempo de vida de estrellas normales

$$\tau \sim 0.007 \frac{Mc^2}{L} \sim M^{1-a} \rightarrow \tau \sim \begin{cases} M^{-2} & a=3 \\ M^{-4} & a=5 \end{cases}$$

Las estrellas más masivas viven menos.

Diagrama H-R



Soluciones politrópicas

- Podemos simplificar el sistema de ecuaciones proponiendo una relación politrópica entre p y ρ del tipo:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma$$

$$\gamma = \frac{n+1}{n}$$

n : índice politrópico

- Completamos el sistema de ecuaciones con

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho \rightarrow \frac{dM}{dr} = 4\pi \rho r^2$$

- En variables adimensionales

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \rho_0 \psi^n \\ r = R x \end{array} \right\} \frac{\rho_0}{R} \frac{d\psi}{dx} \psi^{n \cdot \gamma} = -\frac{G\rho_0}{R^2} \frac{\psi^n M(r)}{x^2}$$

- Debo despejar $M(r)$ y derivar, es decir

$$n \gamma = n+1 \rightarrow \frac{x^2}{\psi^n} \frac{d\psi^{n+1}}{dx} = -\left[\frac{G\rho_0}{\rho_0 R} \right] M(r)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{R} \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2}{\psi^n} \frac{d\psi^{n+1}}{dx} \right] = -\frac{G\rho_0}{\rho_0} 4\pi \rho_0 R^2 x^2 \psi^n$$

$$\frac{d}{dx} \psi^{n+1} = (n+1) \psi^n \frac{d\psi}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi}{dx} \right) = -\left[\frac{4\pi G\rho_0^2 R^2}{\rho_0 (n+1)} \right] x^2 \psi^n$$

- Elegimos la constante R tal que $[] = 1$, es decir

$$n+1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \rightarrow R = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_0}{4\pi G\rho_0^2} \right)^{1/2}$$

- Obtenemos la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi}{dx} \right) = -\psi^n$$

- con condiciones de contorno $\left\{ \begin{array}{l} \psi(x=0) = 1 \\ \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \end{array} \right.$

Ecuación de Lane-Emden

- La ecuación de Lane-Emden es diferencial ordinaria no lineal de 2do orden, que describe equilibrios politrópicos con simetría esférica:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi}{dx} \right) = -\psi^n$$

- Las condiciones de contorno son: (i) $\psi(x=0) = 1$ (equivale a $\rho(r=0) = \rho_0$)

$$(ii) \psi'(x=0) = 0$$

- La condición (ii) se obtiene de un análisis cuidadoso de la ecuación de balance de fuerzas cerca del origen:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G \rho M(r)}{r^2}, \quad M(r) \approx \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0. \quad \text{Entonces} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dp}{dr} = 0$$

- Podemos buscar soluciones polinómicas aproximadas: $\psi(x) \approx \sum_{i=0} b_{2i} x^{2i}$

- Expandimos solo en las potencias pares para cumplir con $\psi(-x) = \psi(x)$. Además $b_0 = 1$ para cumplir (i). La condición (ii) se satisface automáticamente al exigir paridad.

- Uno de los ejercicios les propone buscar una solución polinómica de orden 6.



Ecuación de Lane-Emden

- Una vez obtenida la solución $\psi(x)$, obtenemos el radio R_* y masa M_* de la estrella, a partir del primer cero de la solución, es decir

$$x_* \quad \text{ta} \quad \psi(x_*) = 0$$

- El radio será

$$R_* = R x_*$$

y la masa

$$M_* = -4\pi R^3 \rho_0 x_*^2 \psi'(x_*)$$

donde $R = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_0}{4\pi G \rho_0^2}}$

- Obtenemos también las incógnitas originales del problema:

$$r = R x$$

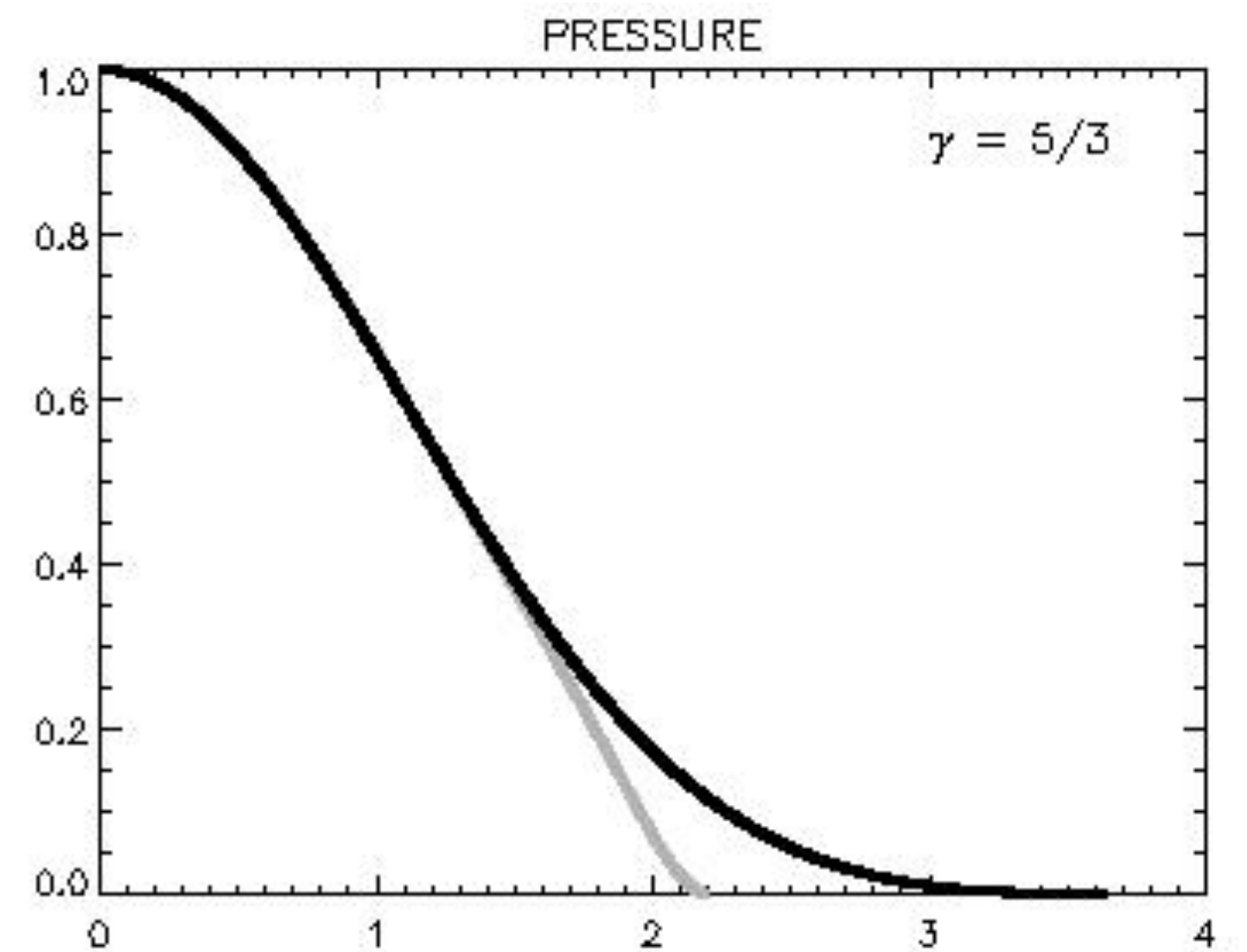
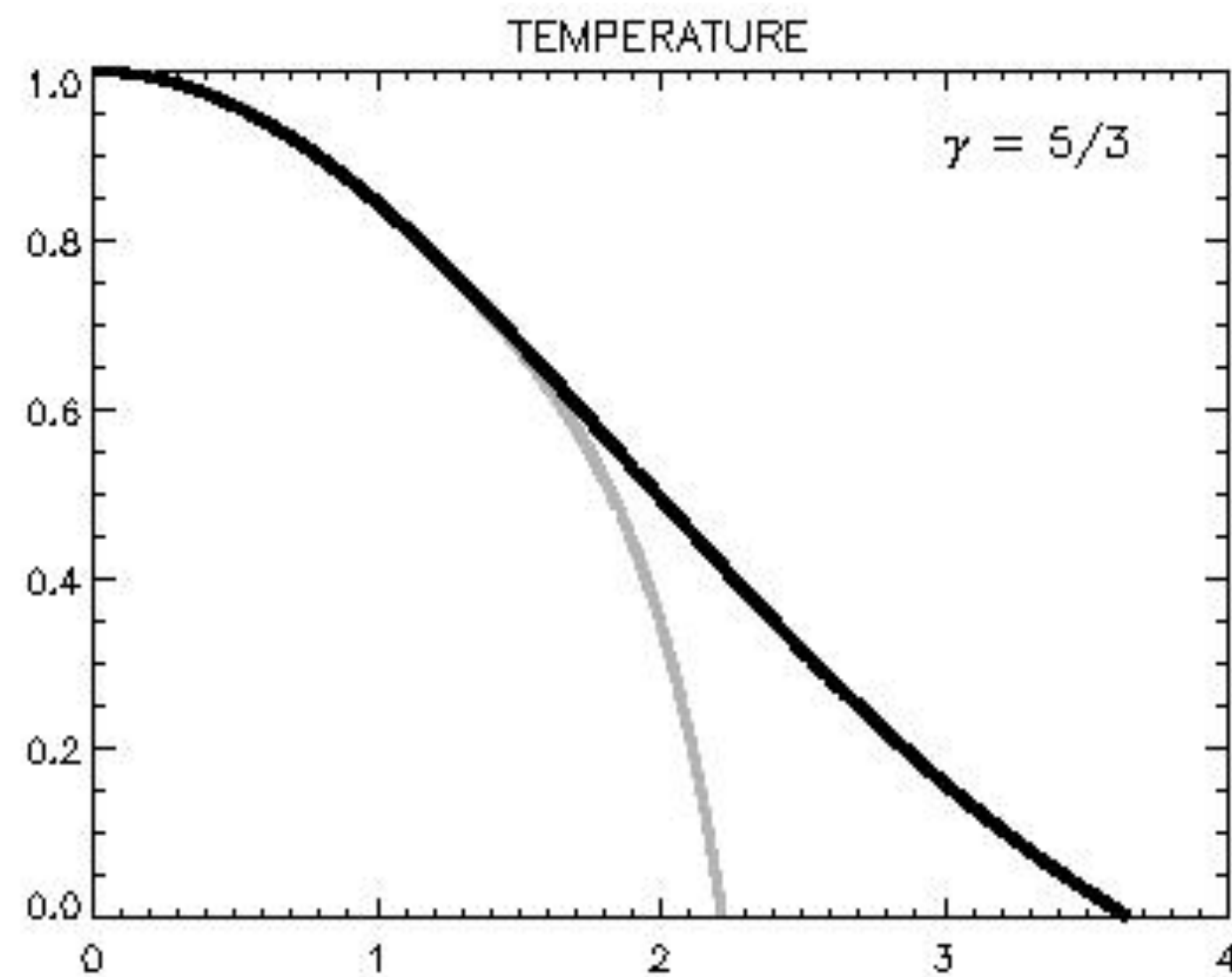
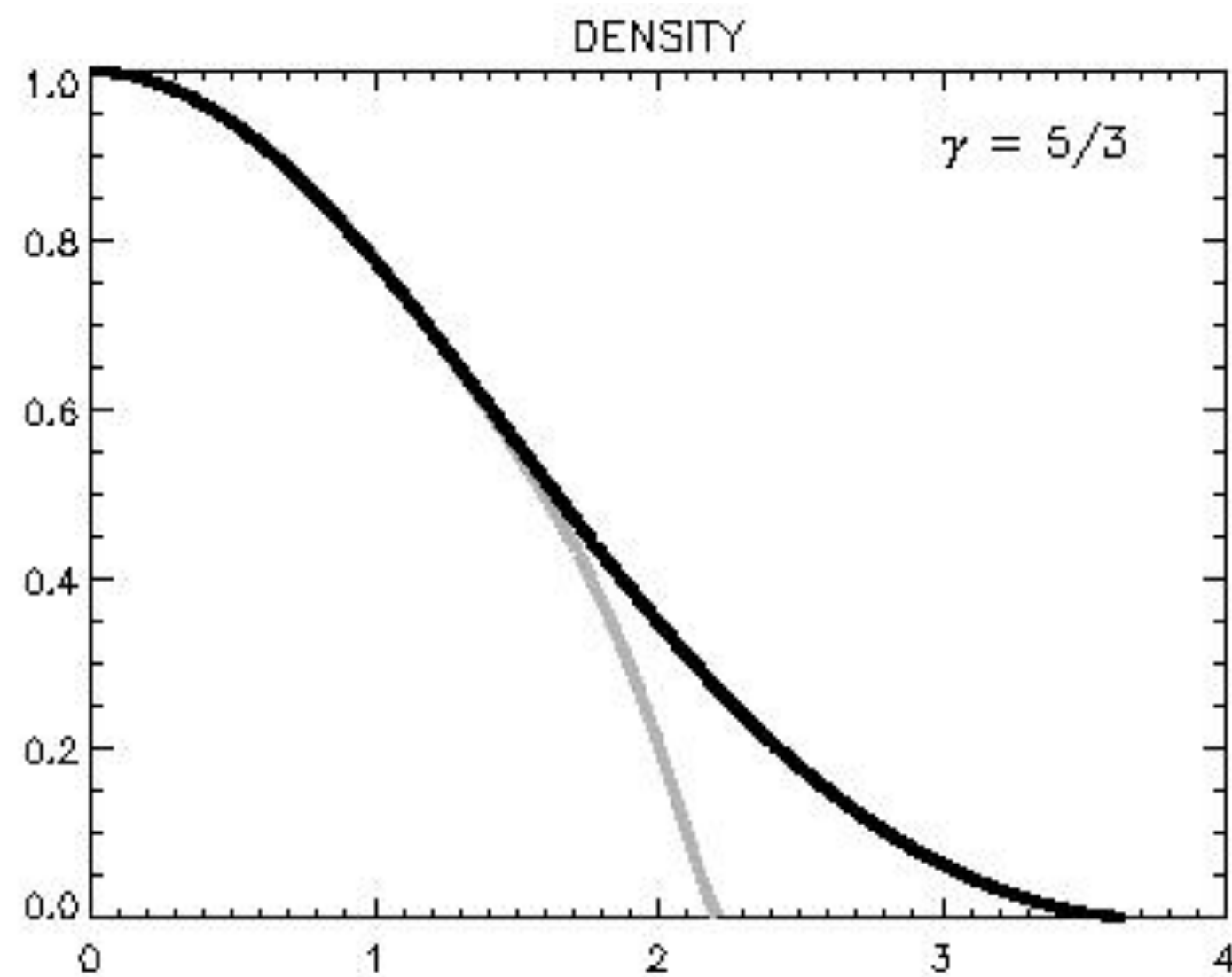
$$\rho(r) = \rho_0 \psi^n(x)$$

$$p(r) = p_0 \psi^{n+1}(x)$$

$$k_B T(r) = \frac{m \rho_0}{\rho_0} \psi(x)$$

$$\gamma = \frac{n+1}{n}$$

La figura muestra los perfiles ρ, T, p vs $x = \frac{r}{R}$ para el caso $\gamma = 5/3$.
En negro la solución numérica usando RK4 y en gris la aproximación polinómica de grado 10.



Ecuación de Lane-Emden

- Noten que la ecuación tiene un solo parámetro, que es el índice politrópico n .
- La figura muestra los perfiles numéricos de densidad ρ/ρ_0 vs r/R para distintos valores del índice politrópico.
- Se listan los valores de radio y masa de la estrella en cada caso.
- Usamos RK4 para la integración numérica.

