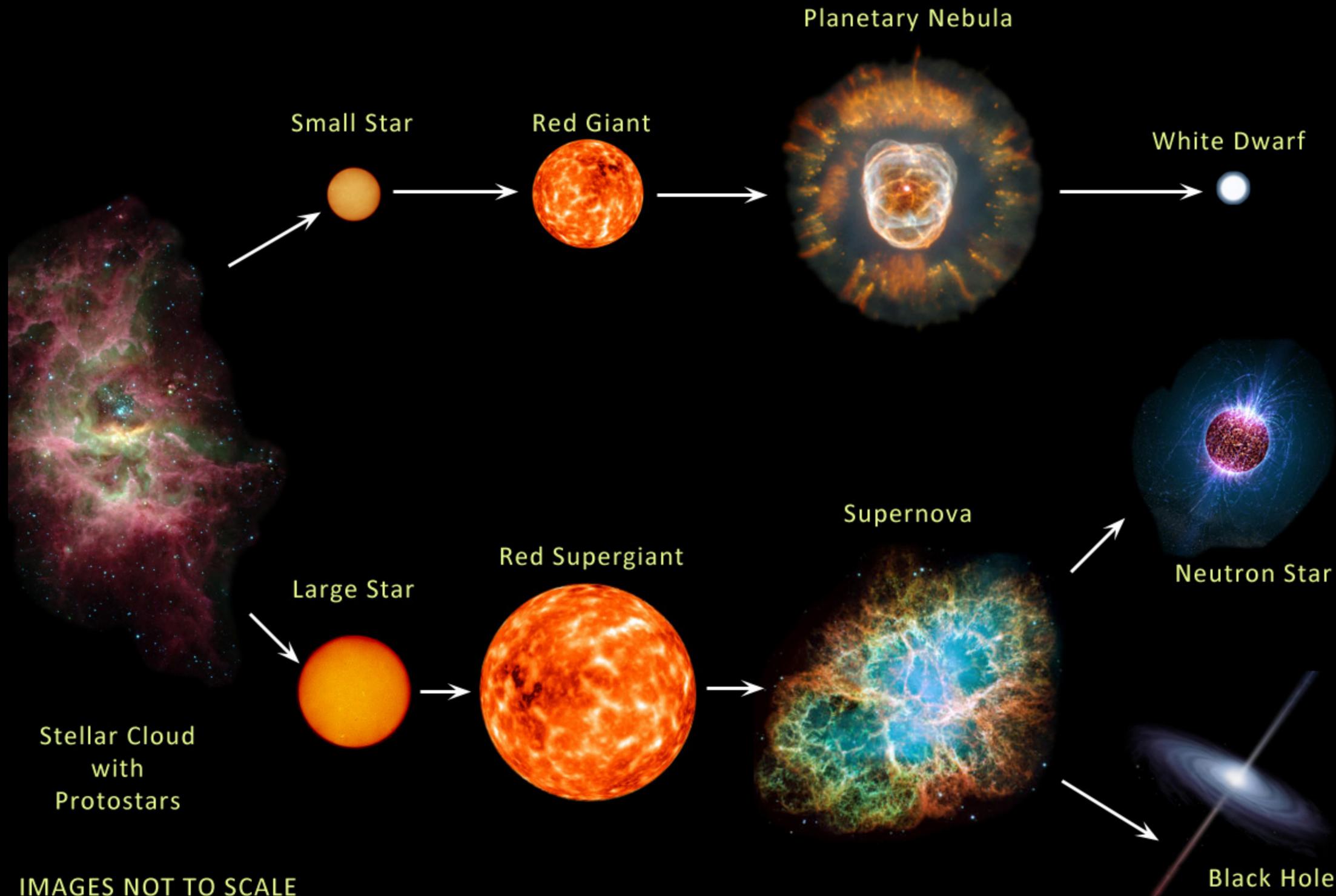


Clase anterior

- Interiores estelares. Leyes de escala.
- Relación Masa vs. Luminosidad.
- Relación Luminosidad vs. Temperatura Efectiva. Comparación con diagrama H-R.
- Soluciones politrópicas. Ecuación de Lane-Emden.
- Aproximación polinómica.
- Integración numérica.

Evolución estelar

EVOLUTION OF STARS



- Simplificando, podemos identificar dos rutas evolutivas para las estrellas de secuencia principal.

- Las estrellas por debajo de $8 M_{\text{sol}}$ se transforman en **gigantes rojas**, luego se desprenden de sus capas externas formando una **nebulosa planetaria**, y su núcleo se compacta formando una **enana blanca**.

- Las estrellas mas masivas se transforman en **supergigantes rojas** y eventualmente explotan como **supernovas**. En caso de quedar un núcleo remanente, se compacta como **estrella de neutrones** o **agujero negro**.

Enanas blancas

- Una vez agotado el combustible en el núcleo, es necesario identificar nuevas fuentes de presión para compensar la fuerza gravitatoria. Mientras eso no suceda, se agudiza el proceso de compactación promovido por la gravedad.
- Entre las leyes de escala, obtuvimos que $\rho \approx M^{-2}$. Es decir, que las estrellas de baja masa pueden alcanzar densidades considerables.
- Pensemos entonces que el proceso de compactación lleva a densidades suficientemente altas como para llegar a un gas de electrones degenerados. En ese caso, la correspondiente **presión de Fermi** podría en principio balancear a la fuerza gravitatoria.

Gas de Fermi

- Repasemos entonces las propiedades de un sistema fermiónico como un gas de electrones.
- El número de fermiones con energía E en $d^3r d^3p$ es:

$$\frac{d^3r d^3p}{h^3} f = \frac{d^3r d^3p}{h^3} \frac{g(E)}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

- Para electrones, el factor de degeneración es $g(E) = 2$, ya que para cada energía tenemos dos estados posibles ($s = \pm 1/2$).
- Es decir, la función de distribución de **Fermi-Dirac**. El límite clásico corresponde a $-E_F/kT \gg 1$, en cuyo caso se recupera la función de distribución de **Maxwell-Boltzmann**.

Gas de Fermi

- En el límite clásico: $f \sim 2 e^{-\frac{E}{kT}} \cdot e^{\frac{E_F}{kT}}$

- El número de fermiones puede escribirse

$$N = \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} f \quad \rightarrow \quad N = Z e^{E_F/kT}$$

donde Z es la llamada función de partición

$$Z = \frac{2}{h^3} \int d^3r d^3p e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

- El resultado de la integral es

$$Z = \frac{V}{\Lambda^3}$$

$$\Lambda = \frac{h}{(2\pi mkT)^{1/2}}$$

$$V = \int d^3r$$

donde Λ es la llamada longitud de de Broglie

- La longitud de onda de de Broglie representa el tamaño de la función de onda de electrones.

- En un fenómeno ondulatorio como la luz, la longitud de onda se relaciona con el impulso como

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{porque } E = h\nu = pc \quad \text{y } \nu = \frac{c}{\lambda}$$

- Una partícula con impulso $p = mv$ puede entonces manifestar un comportamiento ondulatorio con

$$\Lambda \sim \frac{h}{mv} \sim \frac{h}{\sqrt{mkT}} \quad (\text{de Broglie})$$

- Noten que $\Lambda \sim 1/\sqrt{m}$, de modo que los efectos cuánticos de electrones aparecen a escalas más grandes que para protones o neutrones.

- La densidad de electrones es entonces (siempre

en el límite clásico

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{e^{E_F/kT}}{\Lambda^3}$$

- La energía de Fermi E_F (o potencial químico) es

$$E_F = kT \ln(n_e \Lambda^3)$$

Gas de Fermi

- Puesto que el Principio de Pauli obliga a los fermiones a ocupar distintos niveles de energía, la energía E_F es la alcanzada por un gas de electrones de densidad n y temperatura T .

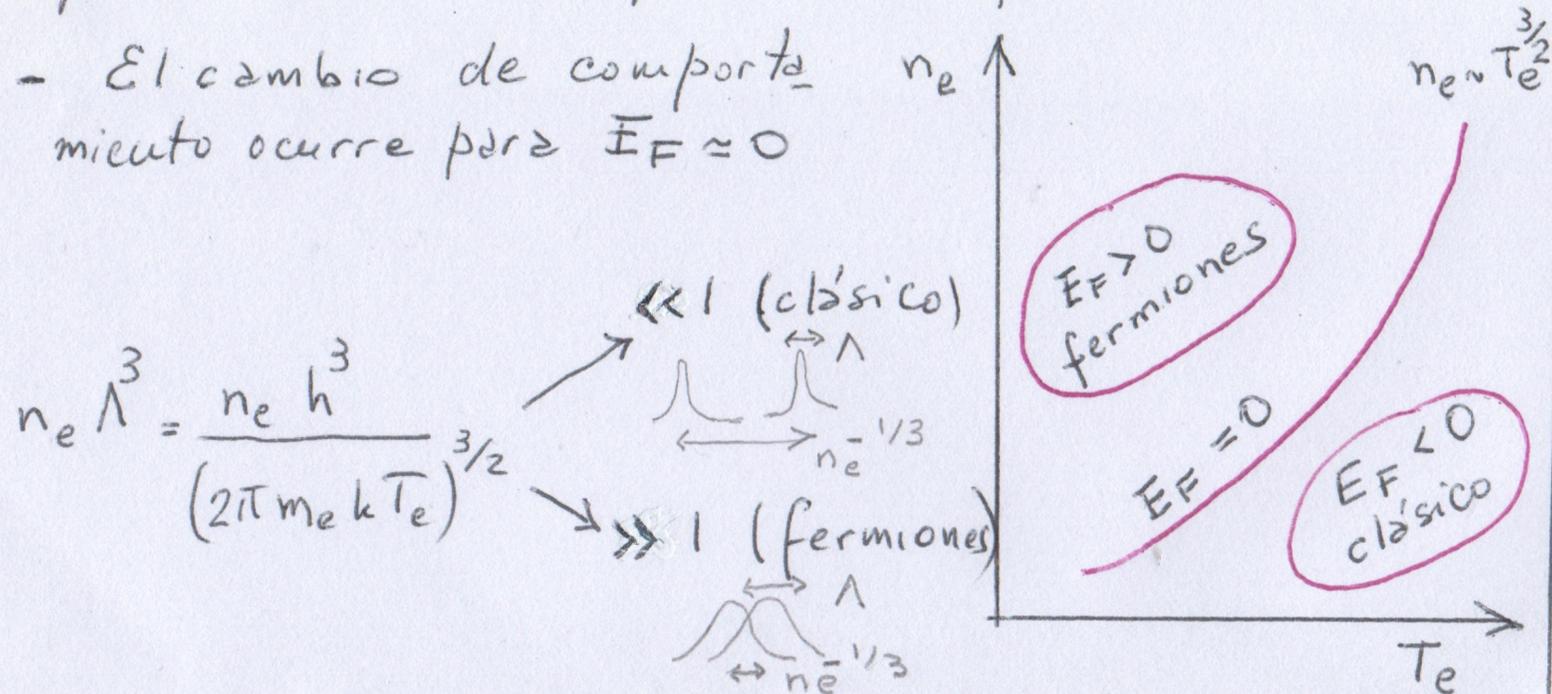
- En el límite clásico

$$-\frac{E_F}{kT} = \ln\left(\frac{1}{n_e \Lambda^3}\right) \gg 1 \iff n_e \Lambda^3 \ll 1$$

Es decir que los e^- están mucho más separados que Λ , y por lo tanto se comportan como puntuales.

$$n_e^{-1/3} \gg \Lambda$$

- El cambio de comportamiento ocurre para $E_F \approx 0$



- Podemos obtener los momentos de la distribución

$$n_e = \frac{2}{h^3} \int \frac{d^3 p}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \int_0^\infty \frac{dE E^{1/2}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

(usando $E = \frac{p^2}{2m}$ y $d^3 p = 4\pi \sqrt{2m_e^3} E^{1/2} dE$)

$$U = \frac{2}{h^3} \int \frac{d^3 p E}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \int_0^\infty \frac{dE E^{3/2}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

$$p_e = kT \cdot \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \int_0^\infty dE E^{1/2} \ln\left(1 + e^{\frac{E_F-E}{kT}}\right)$$

- Integrando por partes la expresión para p_e :

$$p_e = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \int_0^\infty dE E^{3/2} \frac{2/3}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} = \frac{2U}{3}$$

- Tenemos entonces n_e, U, p_e en función de T y E_F . Para obtener la ecuación de estado, queremos deshacernos de E_F y obtener $p_e(n_e, T_e)$.

Gas de Fermi

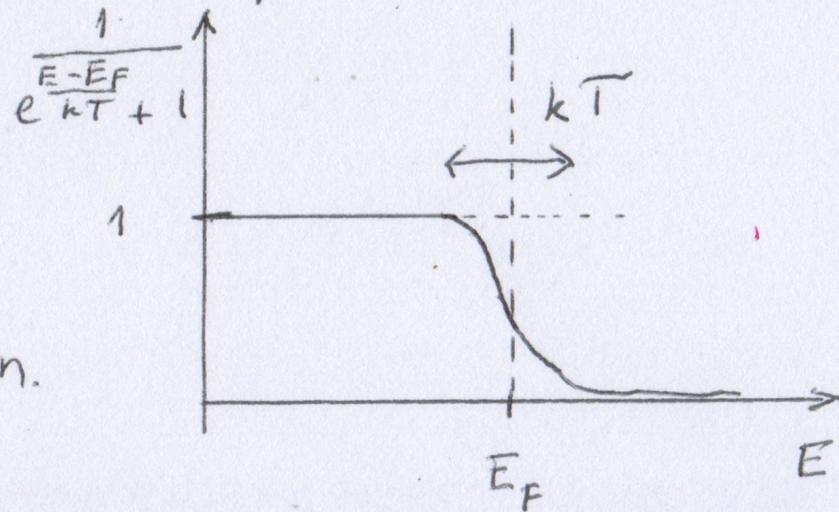
- En el límite clásico $e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1 \gg 1$
Verifiquen que en este límite recuperamos

$$p_e = n_e kT$$

$$U = \frac{3}{2} n_e kT$$

- Por otro lado, en el límite fermiónico $E_F \gg kT$

En el límite $T \rightarrow 0$, esta función tiende a una función escalón.



Entonces:

$$\int_0^{\infty} dE \frac{(\dots)}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \approx \int_0^{E_F} dE (\dots) \quad (\text{si } T \rightarrow 0)$$

- Así por ejemplo

$$n_e \approx \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \frac{E_F^{3/2}}{3/2}$$

- Para la energía interna

$$U = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{3/2} \frac{E_F^{5/2}}{5/2} = \frac{3}{2} p_e$$

- Podemos deshacernos de E_F para obtener

$$p_e = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3}$$

- Este es un resultado importante. A altas densidades, los electrones se comportan como un gas de Fermi, que ejerce una presión p_F aun en el límite de $T \rightarrow 0$.

- Las ecuaciones de equilibrio en este caso son

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$p = C \rho^{5/3} \quad (\rho = m_p n_p, n_e = n_p)$$

Lane-Emden
con $n = 3/2$

Enanas blancas ultra-relativistas

- Hasta ahora hemos considerado efectos cuánticos de los electrones (fermiones), pero no los efectos relativistas.

- Hemos supuesto $E = \frac{p^2}{2m}$. Pero si los electrones tuvieran $v \sim c$, entonces

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$d^3p = 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi}{c^3} \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} E dE = \begin{cases} 4\pi m_e \sqrt{2m_e E} dE & (\text{si } p/m_e \ll c) \\ & \text{clásico} \\ \frac{4\pi}{c^3} E^2 dE & (\text{si } p/m_e \gg c) \\ & \text{ultra-relat} \end{cases}$$

- En el límite ultra-relativista

$$n_e = \frac{8\pi}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{dE E^2}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \approx \frac{8\pi}{c^3 h^3} \int_0^{E_F} dE E^2 = \frac{8\pi}{c^3 h^3} \frac{E_F^3}{3}$$

$$U = \frac{8\pi}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{dE E^3}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \approx \frac{8\pi}{c^3 h^3} \frac{E_F^4}{4}$$

- Para la presión, debemos volver a integrar por partes:

$$P_e = \frac{8\pi}{c^3 h^3} kT \int_0^\infty dE E^2 \ln\left(1 + e^{\frac{E_F - E}{kT}}\right) = \frac{U}{3}$$

integrando por partes

- La ecuación de estado para un gas de Fermi ultra-relativista resulta

$$P_e \approx \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

Corresponde

a Lane-Emden con $n=3$

Revisemos las leyes de escala para equilibrios politrópicos

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho GM(r)}{r^2}$$

$$p = C \cdot \rho^a$$

$$R \sim M^{\frac{a-2}{3a-4}}$$

$$\rho \sim M^{\frac{2}{3a-4}}$$

$$a=1 \rightarrow T = T_x \text{ (sec. p. pal)} \rightarrow \begin{cases} R \sim M \\ \rho \sim M^{-2} \end{cases}$$

$$a=5/3 \rightarrow \text{enanas blancas no relat.} \rightarrow \begin{cases} R \sim M^{-1/3} \\ \rho \sim M^2 \end{cases}$$

$$a=4/3 \rightarrow \text{enanas blancas ultra-relat} \rightarrow M = \text{cte} ?$$

Muy diferentes!



Masa de Chandrasekhar

- La llamada **masa de Chandrasekhar** es un límite superior para las enanas blancas, superado el cual la presión de electrones no logra balancear a la gravedad.
- Fue obtenida por Subrahmanyan Chandrasekhar en 1931, quien muchos años después obtuvo el premio Nobel por sus estudios de interiores estelares.

- Sean N electrones y protones libres ($N_e = N_p$) formando una estrella de radio R_* . Cada electrón tiene un "tamaño" λ . Entonces

$$N \lambda^3 \approx R_*^3$$

- El impulso de cada fermión es

$$p_F \sim \frac{h}{\lambda} \sim \frac{h N^{1/3}}{R_*}$$

- La energía en el límite ultra-relativista es

$$E_F = p_F c \sim \frac{hc}{R_*} N^{1/3}$$

y la energía cinética total: $NE_F \sim \frac{hc}{R_*} N^{4/3}$

- La energía gravitatoria es aportada por los protones

$$E_G = - \frac{G (m_p N)^2}{R_*}$$

- En equilibrio obtenemos el valor crítico

$$hc N_{ch}^{4/3} \sim G m_p^2 N_{ch}^2 \rightarrow N_{ch} \sim \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_p^3}$$

- La masa de Chandrasekhar es simplemente

$$M_{ch} = m_p N_{ch} \sim \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2}$$

$$M_{Planck} = \sqrt{\frac{hc}{G}}$$

- Una estimación adecuada de $M_{ch} \sim 1.4 M_{sol}$

- Para $N > N_{ch}$ es $E_G > NE_F \rightarrow$ colapso