Clase anterior

- Discusión final sobre interiores estelares. Estrellas de neutrones y agujeros negros.

- Campos magnéticos en Astrofísica: planetas, estrellas, galaxias, ...

- Dinámica de fluídos cargados —> plasmas

- Descripción magnetohidrodinámica (MHD).

- Ecuación de inducción. Número de Reynolds magnético.

- Congelamiento campo-materia.

Ecuaciones MHD — Límite no-relativista

- Las ecuaciones MHD son entonces

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0$$

$$\rho\left(\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right) = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}$$

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{c}\partial_t \underline{B} &= \underline{\nabla}\times\underline{E} \\ \underline{E} + \frac{1}{c}\underline{u}\times\underline{B} &= \frac{1}{\sigma}\underline{J} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \partial_t \underline{B} = \underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B}) + \eta\nabla^2\underline{B}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$$

límite no-relativista

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \underbrace{\cancel{4\pi e(n_p - n_e)}}_{\sim 0}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{c}\partial_t \underline{E}}}_{\sim 0}$$

- $$\frac{4\pi e(n_p - n_e)}{4\pi e n} \approx \frac{|\underline{\nabla}\cdot\underline{E}|}{4\pi \frac{J}{u}} \approx \frac{\frac{uB}{cL}}{\frac{cB}{uL}} \approx \left(\frac{u}{c}\right)^2 \ll 1$$

Entonces $n_p - n_e \ll n \longrightarrow n_e \approx n_p \simeq n$

- $$\frac{\left|\frac{1}{c}\partial_t \underline{E}\right|}{|\underline{\nabla}\times\underline{B}|} \approx \frac{\frac{uB}{c^2 T}}{\frac{B}{L}} \approx \left(\frac{u}{c}\right)^2 \ll 1$$

- Hemos usado

$$E \sim \frac{uB}{c}$$

$$J \sim e n u$$

$$J \sim \frac{c}{4\pi}\frac{B}{L}$$

$$u \sim \frac{L}{T}$$

Ecuación de inducción

- La ecuación de inducción es una de las ecuaciones MHD, que rige la dinámica del campo magnético:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

- Para Rm >> 1 $\quad \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B})$ (congelamiento)

- Para Rm <<1 $\quad \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \underline{B}$ (difusión)

  - Ambos regímenes estan presentes en la dinámica de la corona solar.
  - SDO_movie.mp4 muestra la compleja dinámica de regiones activas y algunas fulguraciones menores.
  - Fulguración solar (https://www.youtube.com/watch?v=q-ZQBlWdlAY)

Régimen difusivo

- En el régimen Rm << 1 , tenemos entonces $\dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \underline{B}$.

- Es decir que $\underline{\mathrm{B}}$ sufre un proceso difusivo. El tiempo de difusión para inhomogeneidades de tamaño λ es

$$\frac{B}{\tau_\lambda} \approx \eta \frac{B}{\lambda^2} \quad \rightarrow \quad \tau_\lambda \approx \frac{\lambda^2}{\eta}$$

- La corriente eléctrica asociada es $\underline{J} = \dfrac{c}{4\pi} \underline{\nabla} \times \underline{B} \quad \rightarrow \quad J_\lambda \approx \dfrac{c}{4\pi} \dfrac{B_\lambda}{\lambda}$

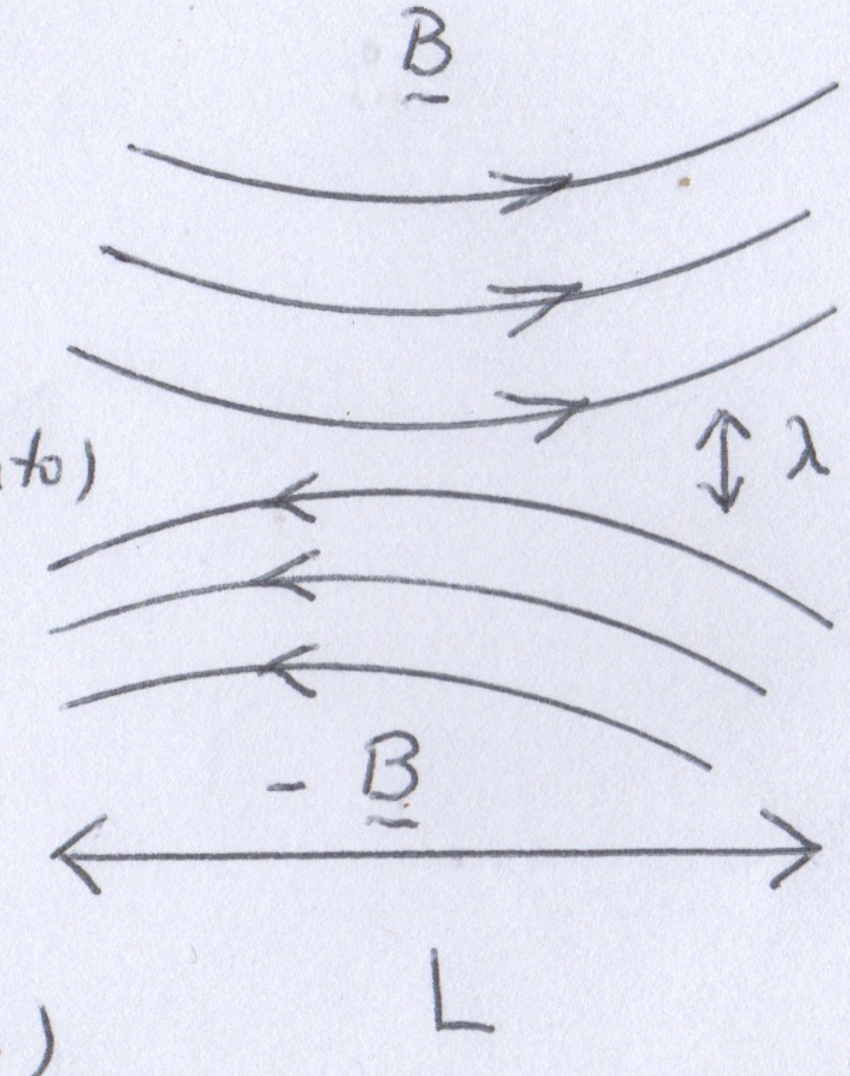
- Un caso particularmente interesante, corresponde a un encuentro de líneas magnéticas de igual intensidad y sentidos opuestos

- Colisión entre dos estructuras macro de tamaño L

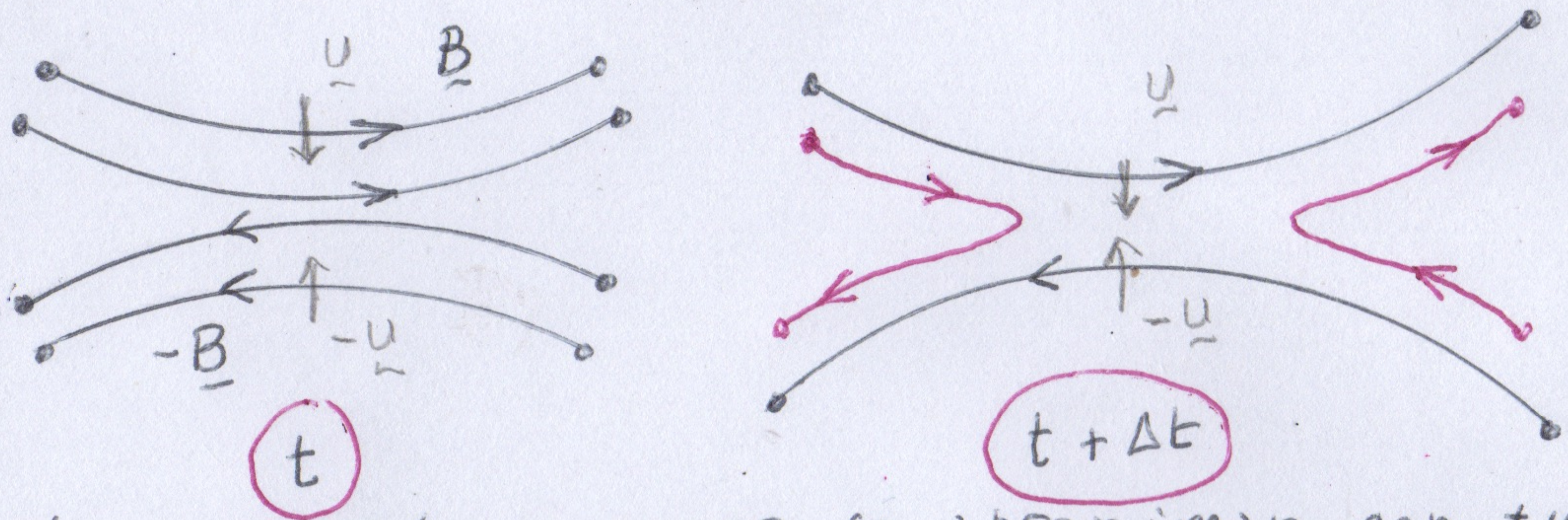
$R_m^L \sim \dfrac{uL}{\eta} >> 1$ (congelamiento)

- Separación $\lambda << L$

$R_m^\lambda \sim \dfrac{u\lambda}{\eta} << 1$ (difusión)



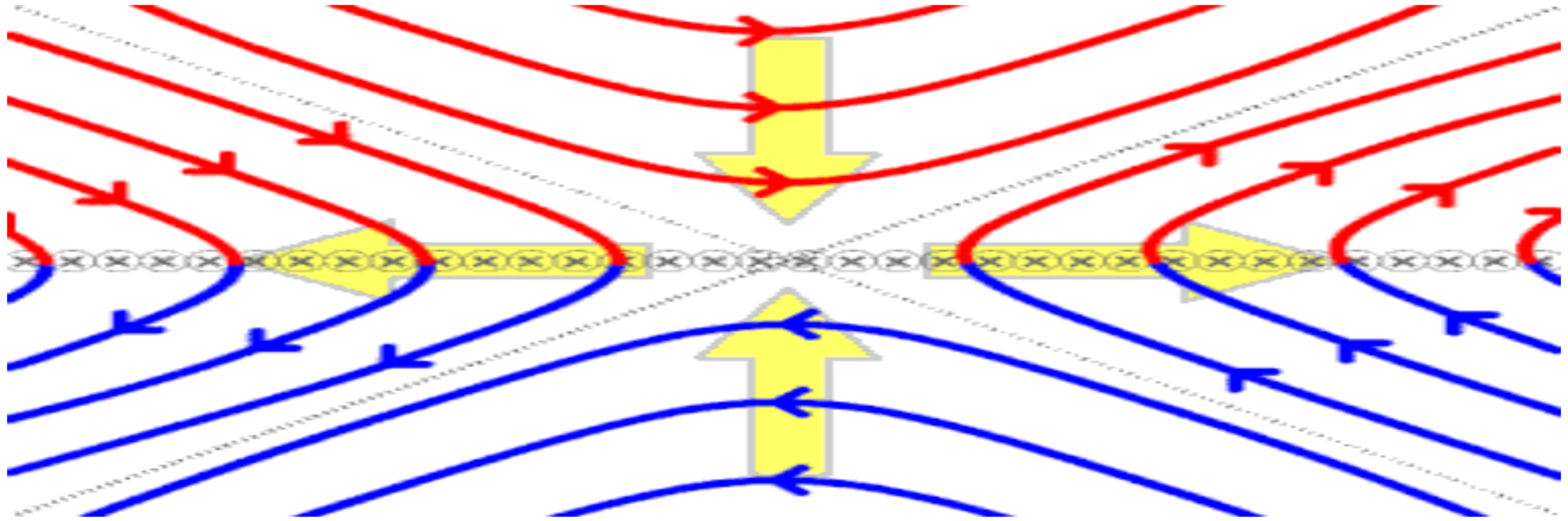
- En estas circunstancias, se da el fenómeno de reconexión magnética



- Las estructuras macro se aproximan con $\pm \underline{u}$.
- La difusión re-conecta líneas

Reconexión magnética

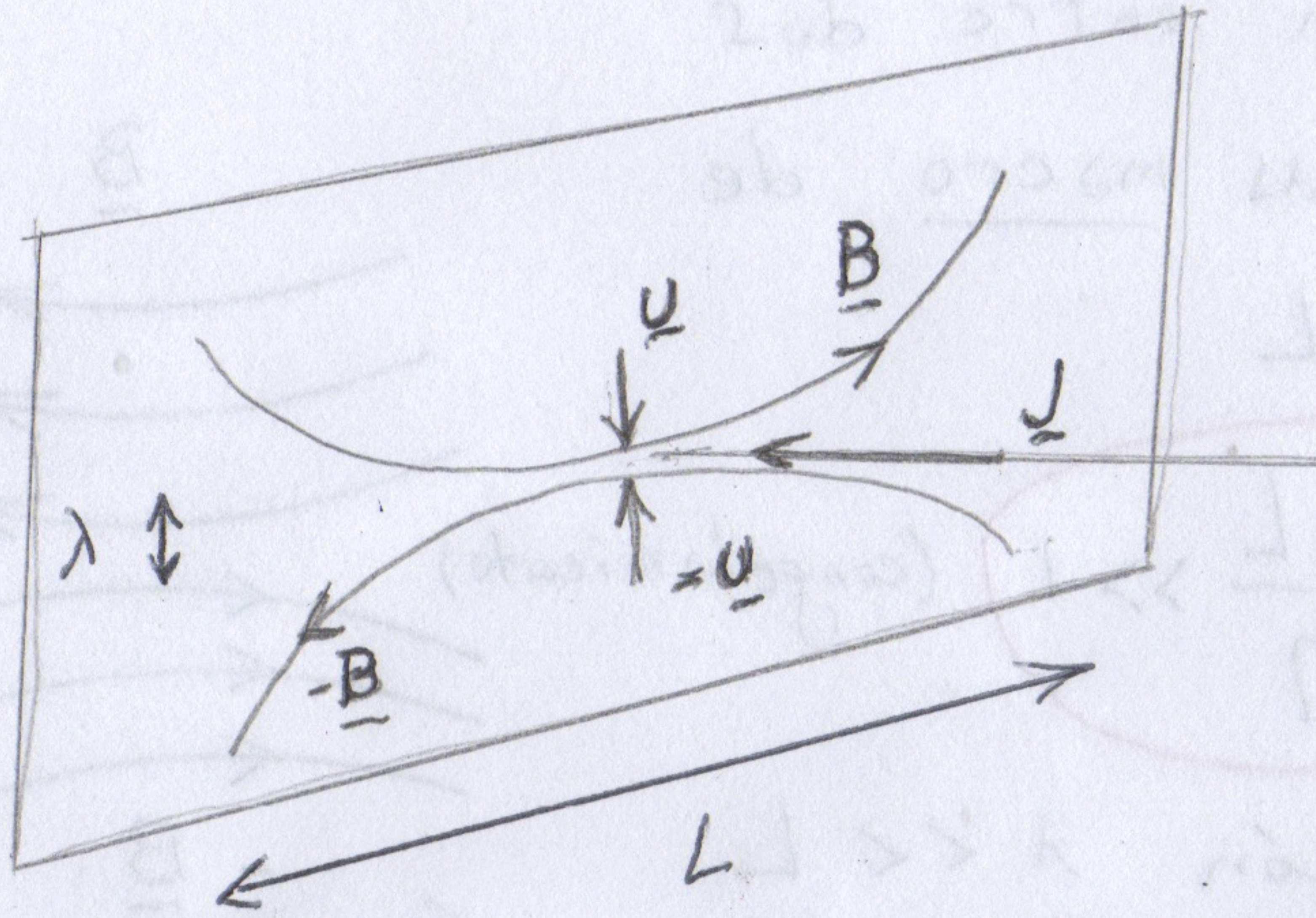
- Las líneas magnéticas y el plasma de las estructuras macro se aproximan desde arriba y abajo, cumpliento la condición de congelamiento.
- Al ingresar a la región de difusión, cada línea **roja** se reconecta con una línea **azul**. El campo de velocidades se indica en **amarillo**.
- Consistentemente, en la región de difusión circula corriente eléctrica en la dirección perpendicular a la pantalla.



- La densidad de corriente es $J \sim \frac{c}{4\pi}\frac{B}{\lambda}$
- Tambien tendremos un campo $\underline{E}$ autoconsistente

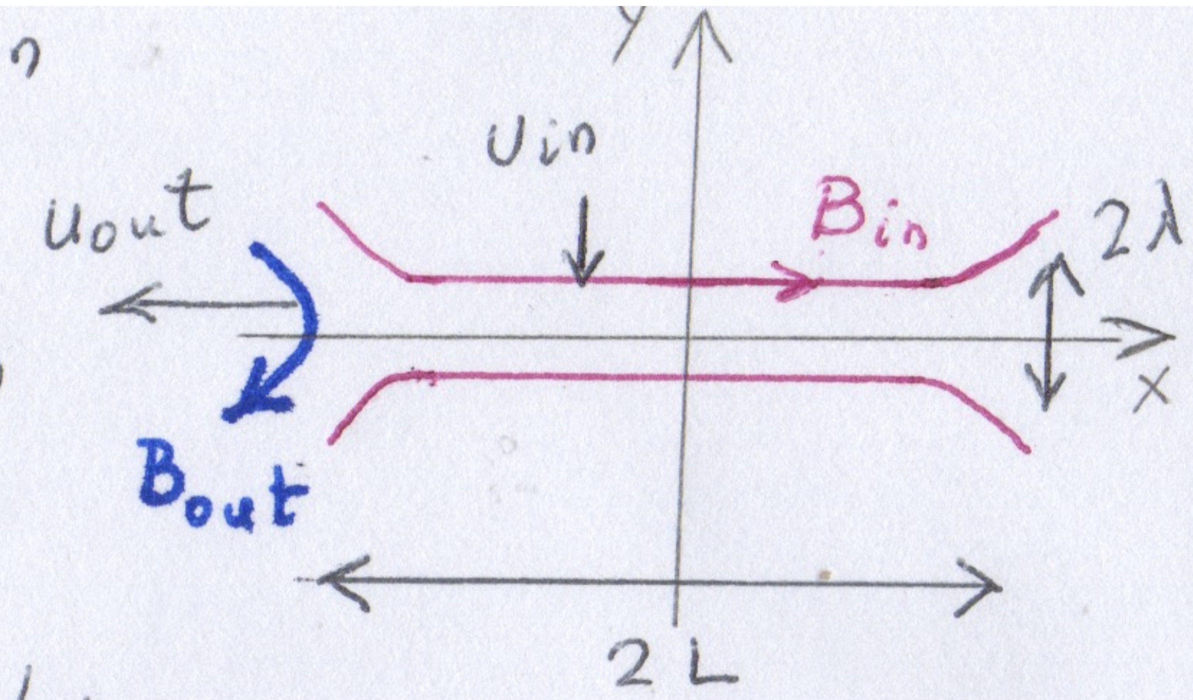
$$\underline{E} = \frac{1}{\sigma}\underline{J} \qquad \eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

- Una vez reconectadas, las líneas magnéticas y el plasma son eyectados a izquierda y derecha, cumpliendo la condición de congelamiento.



Modelo de Sweet-Parker (1958)

- Sweet y Parker proponen en 1958 un modelo estacionario, incompresible, 2D de las ecs. MHD.



- Por la ec. continuidad:

$$\underline{\nabla}\cdot(\rho\, \underline{u}) = 0 \longrightarrow \rho\, u_{in}\, 2L = \rho\, u_{out}\, 2\lambda$$

$$u_{in} L = u_{out} \lambda$$

- Por Faraday

$$\left.\begin{aligned} \underline{\nabla}\times \underline{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \underline{B} = 0 \\ \underline{E} &= -\frac{1}{c}\underline{u}\times\underline{B} + \frac{1}{\sigma}\underline{J} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{En } \hat{x}: \ -\frac{1}{c}\partial_t B_{in} = \partial_y E_z \\ &E_z = -\frac{1}{c} u_{in} B_{in} + \frac{J_z}{\sigma} \end{aligned}$$

$$\partial_y E_z = 0 \longrightarrow \frac{1}{c} u_{in} B_{in} \simeq \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{B_{in}}{\lambda}$$

$$u_{in} \simeq \frac{\eta}{\lambda}$$

- La ec. movimiento $\rho(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u} = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}$

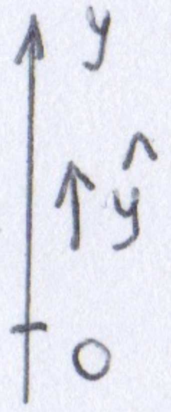
- Usando $(\underline{\nabla}\times\underline{F})\times\underline{F} = (\underline{F}\cdot\underline{\nabla})\underline{F} - \underline{\nabla}\left(\frac{F^2}{2}\right)$ la transform

mos en

$$\rho\, \underline{\omega}\times\underline{u} - \frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B} = -\underline{\nabla}\left(\frac{\rho u^2}{2} + p + \frac{B^2}{8\pi}\right)$$

- Evaluamos la componente $\hat{y}$ en el eje $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\omega} \parallel \hat{z} \\ &\underline{u} \parallel \hat{y} \\ &\underline{B} \parallel \hat{x} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \partial_y\left(\underbrace{\cancel{\frac{\rho u_{in}^2}{2}}}_{\sim 0} + p + \frac{B_{in}^2}{8\pi}\right) = 0$$

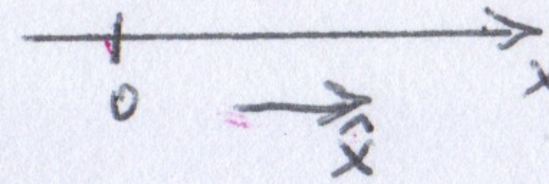


$$p_0 + \frac{B_{in}^2}{8\pi} = p(0,0)$$

p_0: lejos del origen

$p(0,0)$: en el origen

- Ahora la componente $\hat{x}$ en el eje $y=0$:



$$\left.\begin{aligned} &\underline{\omega} \parallel \hat{z} \\ &\underline{u} \parallel \hat{x} \\ &\underline{B} \parallel \hat{y} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \partial_x\left(\frac{\rho u_{out}^2}{2} + p + \underbrace{\cancel{\frac{B_{out}^2}{8\pi}}}_{\sim 0}\right) = 0$$

$$\frac{\rho u_{out}^2}{2} + p_0 = p(0,0)$$

- Comparando las últimas dos ecuaciones:

$$u_{out} = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

Tasa de reconexión magnética

- Los parámetros de las estructuras macro, son los datos del problema: ρ, L, B_{in}, p_0

$$v_A = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}} \; : \text{ vel. Alfvén}$$

- De las ecuaciones anteriores, las incógnitas son entonces: $\lambda, u_{in}, p(0,0)$.

- Para las estructuras macro, podemos definir el número de Lundquist, una suerte de número de Reynolds magnético con velocidad v_A

$$S = \frac{v_A L}{\eta} \; : \text{ número de Lundquist}$$

- Entonces, obtenemos u_{in} y λ:

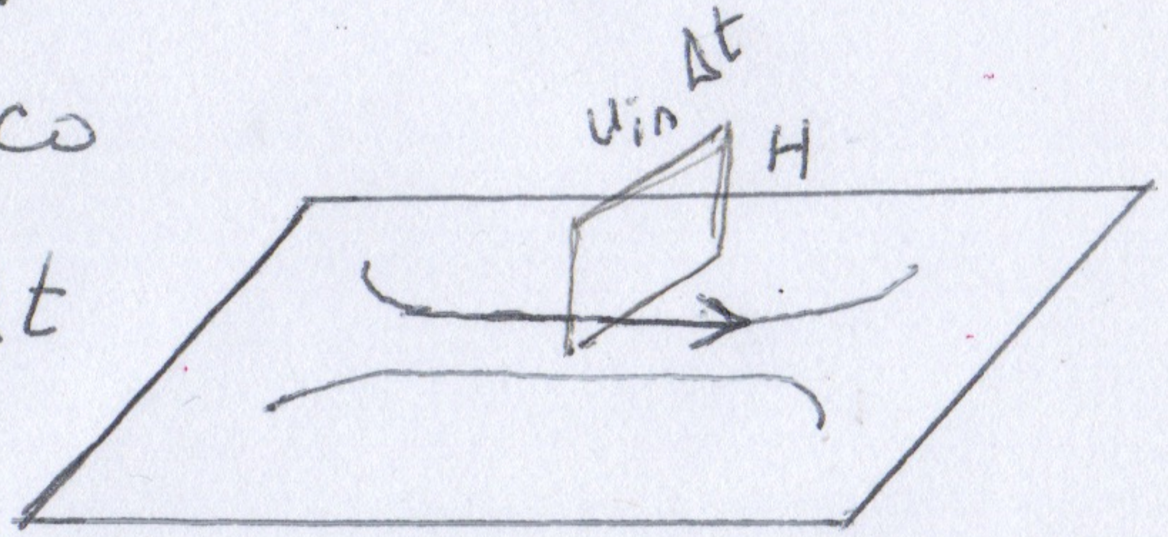
$$u_{in} = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{\eta}{v_A \cdot L} \cdot \frac{v_A L}{\lambda} = \frac{1}{S} \cdot \frac{v_A L}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{u_{in}}{v_A} \longrightarrow u_{in} = \frac{1}{S} \cdot v_A \left(\frac{v_A}{u_{in}}\right)$$

$$\left(\frac{u_{in}}{v_A}\right)^2 = \frac{1}{S} \longrightarrow \frac{u_{in}}{v_A} = \frac{\lambda}{L} = S^{-1/2}$$

- Definimos la tasa de reconexión magnética como el flujo magnético reconectado por unidad de tiempo.

- El flujo magnético



$$\Delta\Phi = B_{in} \cdot H u_{in} \Delta t$$

- Como el problema es 2D, la tasa de reconexión es por unidad de altura, es decir

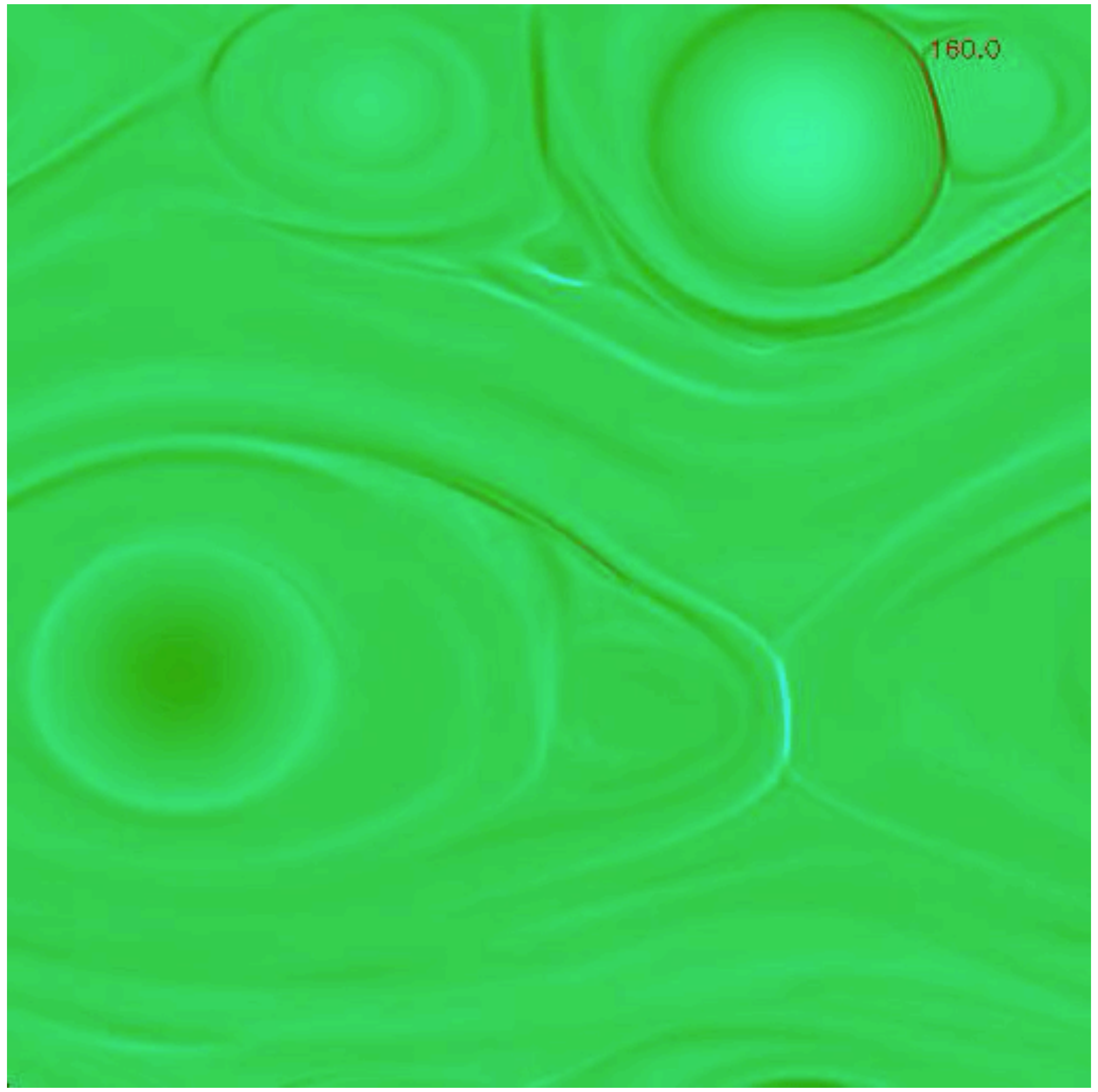
$$\frac{1}{H}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B_{in} \cdot u_{in}$$

- La tasa de reconexión adimensional, usando los datos B_{in}, v_A, es

$$R = \frac{\frac{1}{H}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}{B_{in} v_A} \longrightarrow R = \frac{u_{in}}{v_A} = S^{-1/2}$$

Reconexión difusiva y rápida

- En la corona solar: $B \approx 100 \ Gauss$, $n \approx 10^{10} \ cm^{-3}$. Entonces $v_A \approx 2500 \ km/s$.
- Para hidrógeno ionizado: $\eta \approx 10^4 \ cm^2/s$. Con estructuras macro de longitud $L \approx 10^5 \ km$, resulta $S = \dfrac{v_A \ L}{\eta} \approx 2.5 \ 10^{14}$
- Números de Lundquist enormes como este son comunes en Astrofísica. Entonces, si $S \gg 1$ resulta que $R = S^{-1/2} \ll 1$
- La reconexión es un mecanismo de conversión de energía magnética ($\dfrac{B_{in}^2}{8\pi}$) en cinética ($\dfrac{1}{2} \ \rho v_A^2$). Sin embargo, la tasa de reconexión del modelo difusivo de Sweet-Parker, hacen que esa reconexión sea excesivamente lenta.
- Los modelos de reconexión rápida obtienen $R \approx 0.1 - 1$ y son independientes de S.



  - Simulación numérica de reconexión mostrando J (x,y,t)
  - Simulación numérica de turbulencia MHD mostrando zonas de reconexión.