Clase anterior

- Ecuaciones MHD. Descripción fluidística de plasmas.

- Regímenes de congelamiento y difusivo.

- Reconexión magnética.

- Modelo de Sweet-Parker.

- Tasa de reconexión: $R \approx S^{-1/2}$

- Reconexión difusiva y reconexión rápida.

Ecuaciones MHD — Presión magnética

- Recordemos las ecuaciones MHD:

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0$$

$$\rho\left(\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right) = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{4\pi}\left(\underline{\nabla}\times \underline{B}\right)\times \underline{B}$$

$$\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B}) + \eta\nabla^2\underline{B}$$

- Podemos descomponer la fuerza magnética a través de una identidad vectorial

$$\frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B} = \underbrace{\frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}}_{\text{tensión magnética}} - \underbrace{\underline{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)}_{\text{presión magnética}}$$

$$\left[(\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}\right]_i = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jhl}\,\partial_h B_l\, B_k$$

$$= \varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{jhl}\,\partial_h B_l\, B_k$$

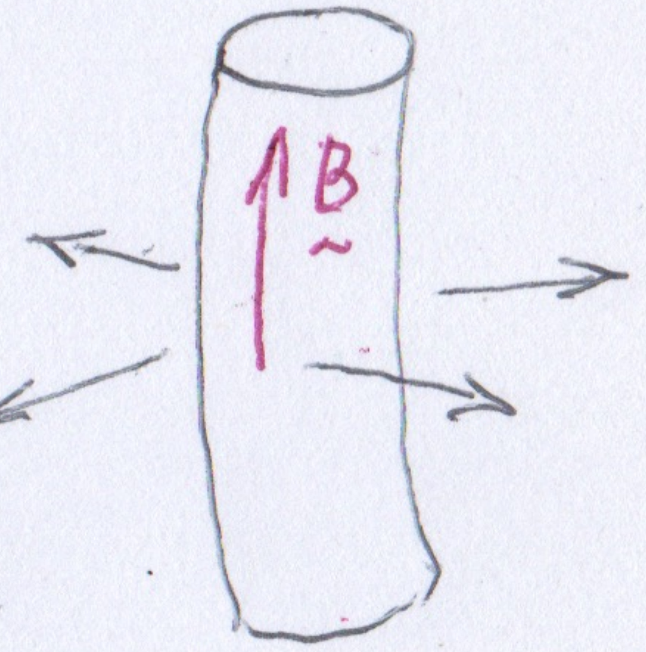
$$= B_k\,\partial_k B_i - B_k\,\partial_i B_k = \left[(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}\right]_i - \left[\underline{\nabla}\frac{B^2}{2}\right]_i$$

Presión magnética

- El término de presión magnética se suma directamente a la presión del gas

$$p_{TOT} = p_{GAS} + \frac{B^2}{8\pi}$$

- La presión magnética actúa en las direcciones perpendiculares al tubo de flujo magnético (tubo = manojo de líneas).



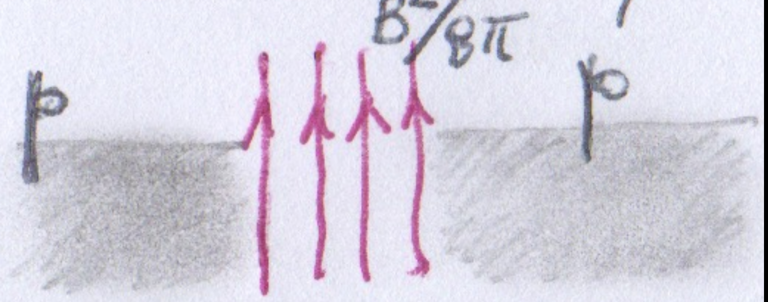
- El parámetro β mide la importancia relativa entre presiones

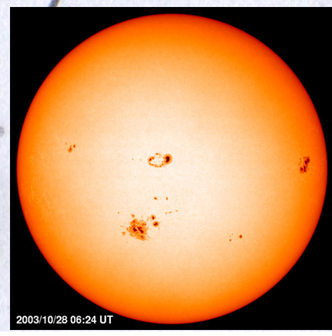
$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$$

$\beta \gg 1$ campo $\underset{\sim}{B}$ despreciable

$\beta \ll 1$ dominado por $\underset{\sim}{B}$

- Ejemplo: mancha solar





Ecuaciones MHD — Tensión magnética

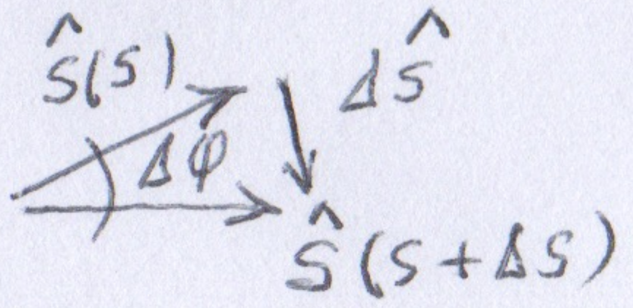
- La tensión magnética mide la variación de $\underline{B}$ a lo largo de $\underline{B}$. Definimos la coordenada curvilínea s a lo largo de $\underline{B}$:

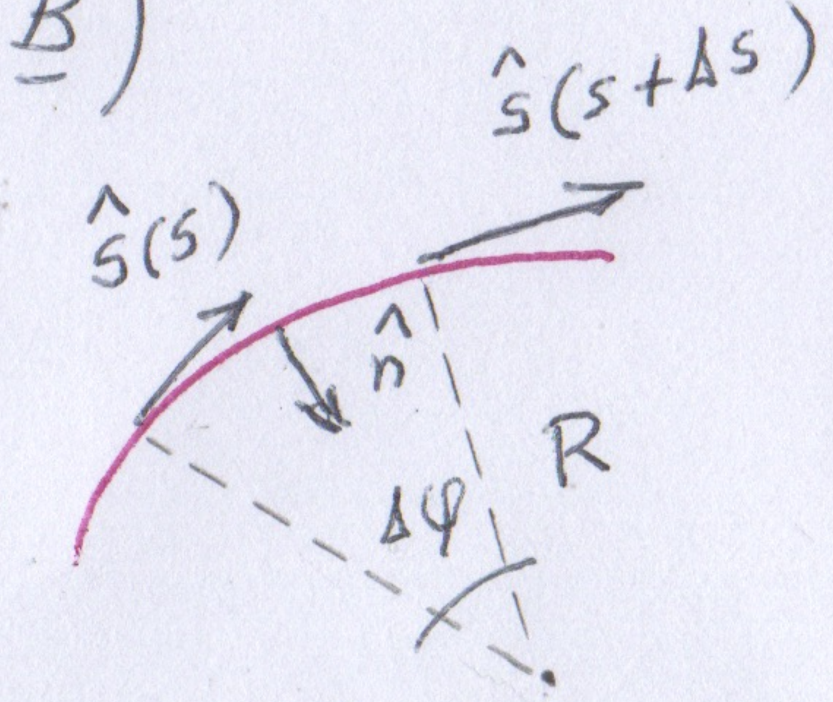
$$\underline{B} = B\hat{s} \longrightarrow \frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B} = \frac{B}{4\pi}\frac{d}{ds}(B\hat{s})$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B} = \frac{d}{ds}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)\hat{s} + \frac{B^2}{4\pi}\frac{d\hat{s}}{ds}$$

- El primer término cancela al de presión magnética en la dirección de $\underline{B}$ (y por lo tanto la presión magnética opera en el plano localmente perpendicular a $\underline{B}$)

- Para el segundo término:





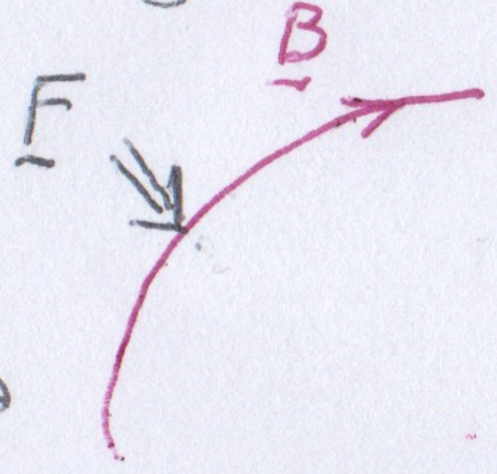
$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\hat{s}}{\Delta s}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\hat{s} \simeq \hat{n}\,|\hat{s}|\,\Delta\varphi \\ \Delta s = R\,\Delta\varphi\end{array}\right\} \longrightarrow \quad \frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}$$

R: radio de curvatura

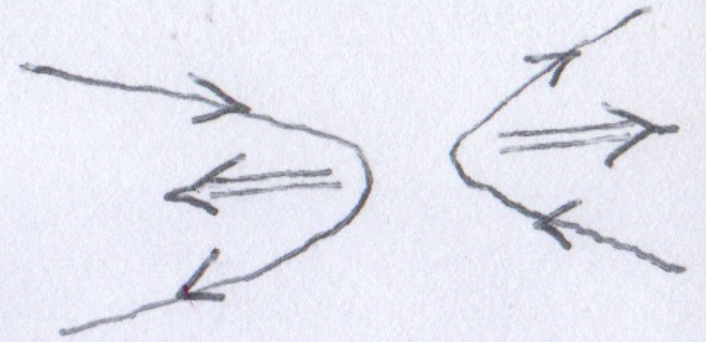
- Entonces la fuerza de tensión magnética

$$\frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B} = \frac{B^2}{4\pi}\frac{\hat{n}}{R}$$



tiende a oponerse a la curvatura de las líneas.

- Ejemplo: líneas reconectadas



Apenas reconectadas, las líneas tienen una alta curvatura (R pequeño)

La tensión magnética acelera rapidamente a las líneas (y al plasma congelado a ellas) hasta una velocidad $v_A = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}}$

Ecuaciones MHD — Ondas de Alfven

- Un equilibrio MHD homogeneo con un campo $\underline{B}_0$ uniforme, puede propagar ondas que hacen oscilar las líneas de $\underline{B}$ como cuerdas vibrantes.
- Supongamos que el fluido sea incompresible, es decir $\rho = cte$, y el equilibrio

$$\underline{u}_0 = 0$$
$$p_0 = p_0 = cte$$
$$\underline{B} = B_0 \hat{z}$$

- Perturbamos a primer orden

$$\left.\begin{aligned} \rho &= cte \\ p &= p_0 + \delta p \\ \underline{u} &= \delta \underline{u} \\ \underline{B} &= B_0 \hat{z} + \delta \underline{B} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} &\underline{\nabla} \cdot \delta \underline{u} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \delta \underline{B} \\ &\partial_t \delta \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \delta p + \frac{1}{4\pi\rho} (\underline{\nabla} \times \delta \underline{B}) \times \underline{B}_0 \\ &\partial_t \delta \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\delta \underline{u} \times \underline{B}_0) \end{aligned}$$

Proponemos $\delta \underline{u}, \delta \underline{B} \sim e^{i\underline{k} \cdot \underline{r} - i\omega t}$

- Obtenemos $\underline{k} \cdot \delta \underline{u} = 0 = \underline{k} \cdot \delta \underline{B}$ (ondas transversales)

$$-\omega \delta \underline{u} = -\underline{k} \frac{\delta p}{\rho} + \frac{B_0}{4\pi\rho} (k_z \delta \underline{B} - \underline{k} \delta B_z)$$

$$-\omega \delta \underline{B} = B_0 k_z \delta \underline{u}$$

- Multiplicamos la primera ecuación por $\underline{k} \cdot (\cdots)$ y obtenemos

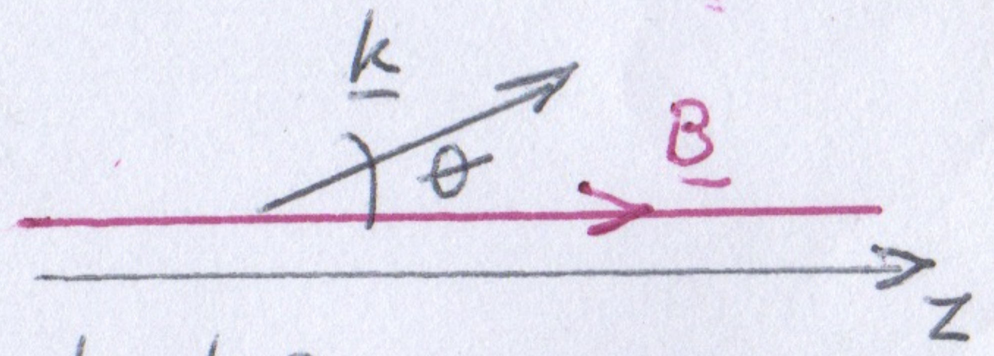
$$\delta p = -\frac{B_0}{4\pi} \delta B_z$$

- Combinando ahora ambas ecuaciones

$$\omega^2 = k_z^2 \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$$

- Definimos la velocidad de Alfven $\quad V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$

$$\omega = \pm V_A k \cos\theta$$



- Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones vectoriales, obtenemos las relaciones de polarización

$$\delta \underline{u} = \mp \frac{\delta \underline{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

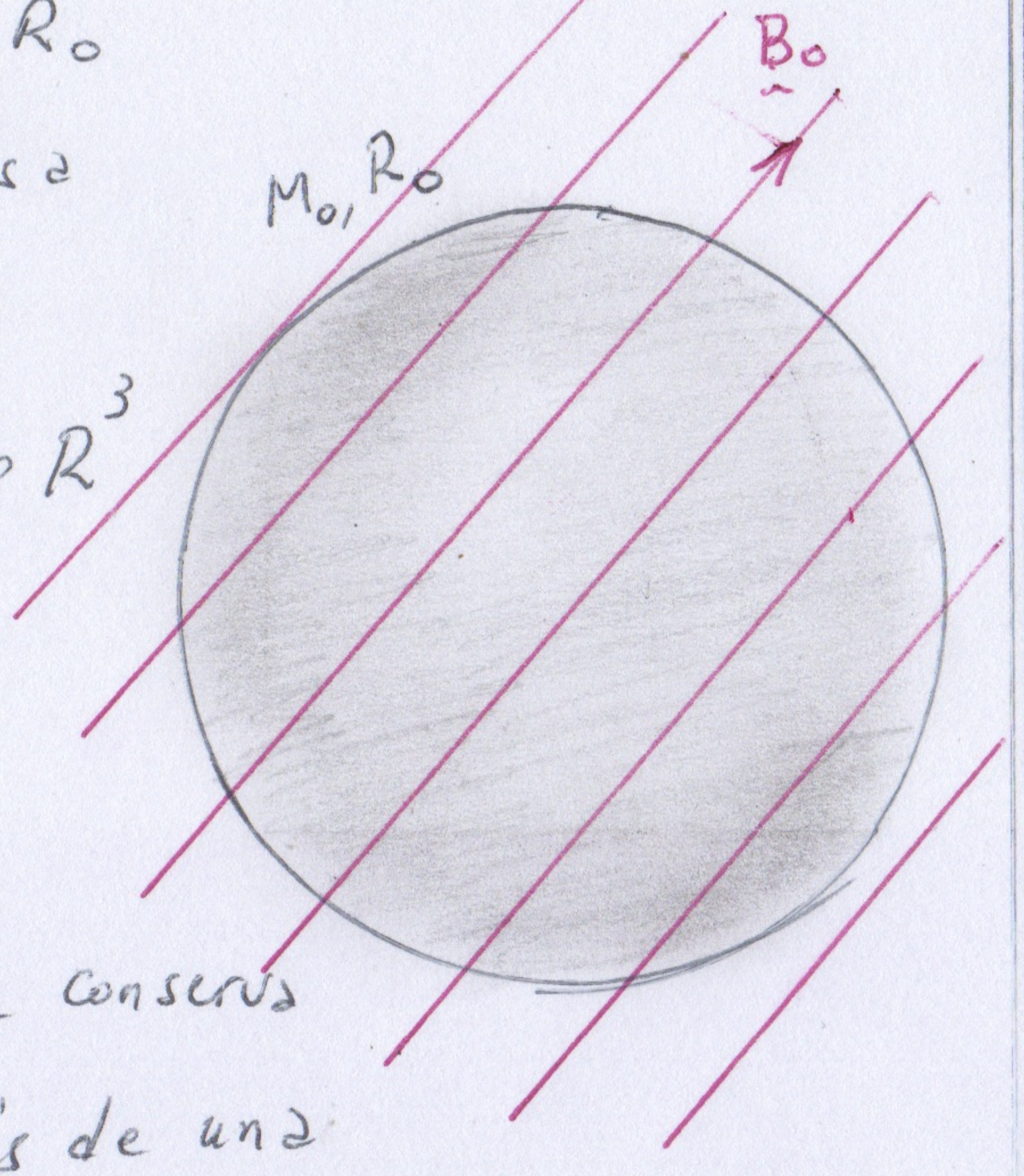
Ecuaciones MHD — Colapso gravitatorio

- En el colapso gravitatorio de un grumo de materia del medio interestelar, la compresión de campo magnético puede ser importante (¿?)

- Un grumo de radio R_0 con masa M_0, colapsa conservando su masa

$$M_0 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3 = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$$

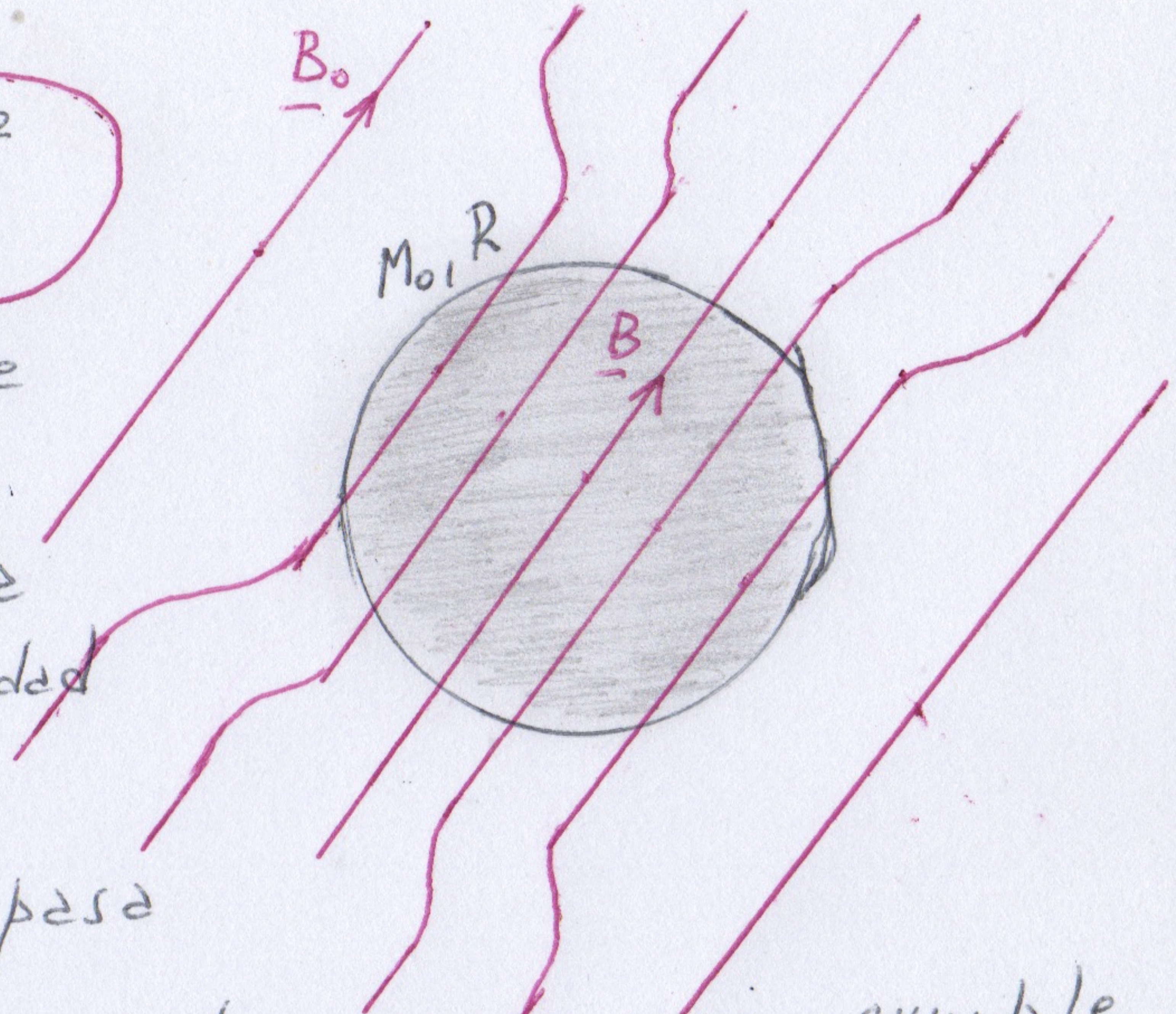


- Por congelamiento, se conserva el flujo de $\mathbf{B}$ a través de una superficie perpendicular a $\mathbf{B}$ que colapsa con el grumo

$$\Phi_0 = B_0 \pi R_0^2 = B \pi R^2$$

- Entonces

$$B = B_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$



- Puede verse que la densidad de masa se compacta mas que la densidad de líneas de $\mathbf{B}$.

- Para ver que pasa con las presiones, supongamos que cumple una relación politrópica

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

- Entonces $p = p_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}$

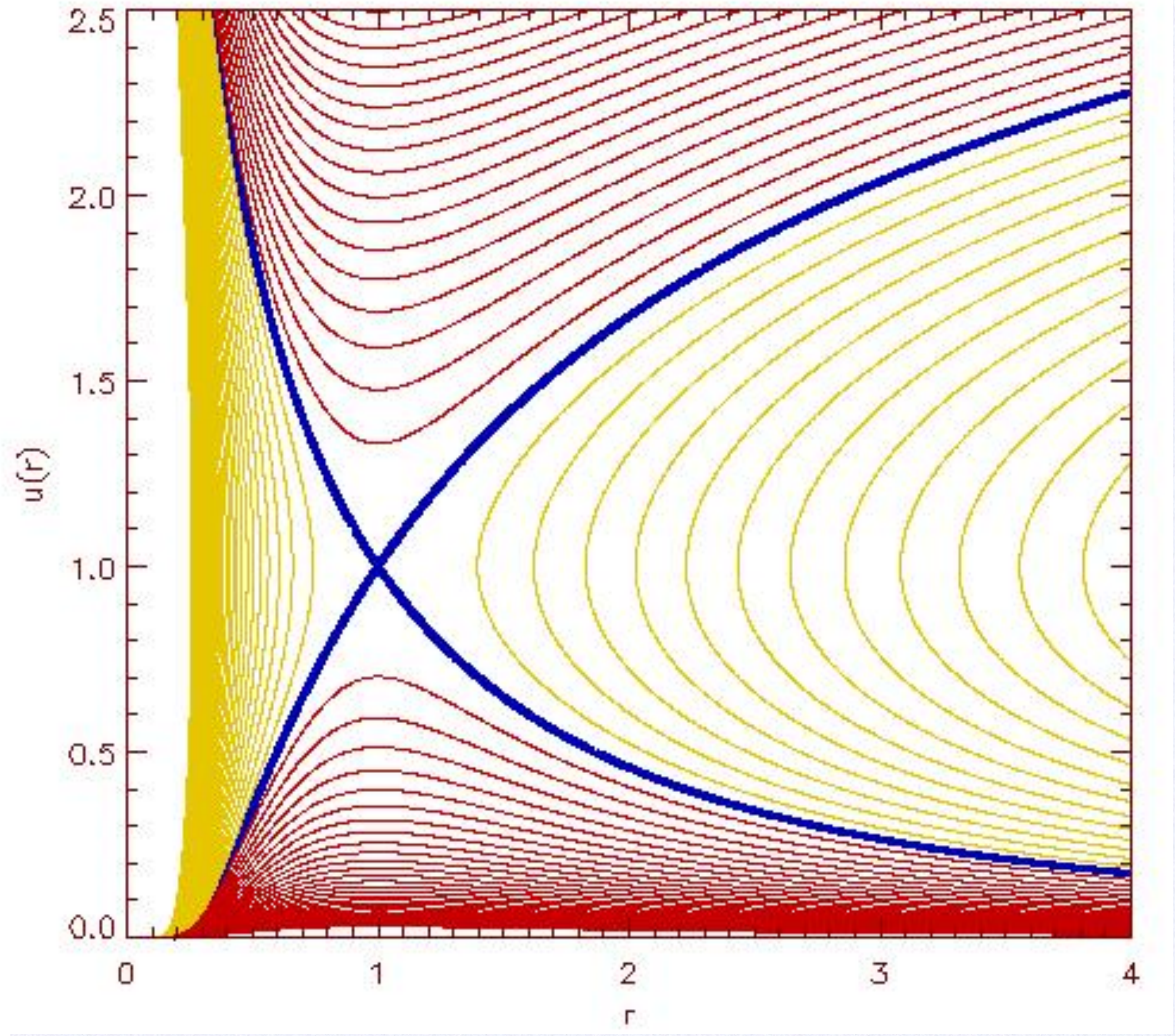
- El parámetro $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$ resulta

$$\beta = \beta_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma - 4}$$

$\gamma < 4/3 \longrightarrow \beta < \beta_0$

En este caso el rol de $\mathbf{B}$ es progresivamente importante en el colapso

Ecuaciones MHD — Viento solar



- Recordemos el modelo de Parker de viento solar con $u_r(r)$ superando la vel. del sonido en el punto crítico.
- Incorporemos ahora el rol de $\underline{B}$ suponiendo

$$\frac{B^2}{8\pi} \ll \frac{\rho u^2}{2}$$

(viento solar superalfvénico)

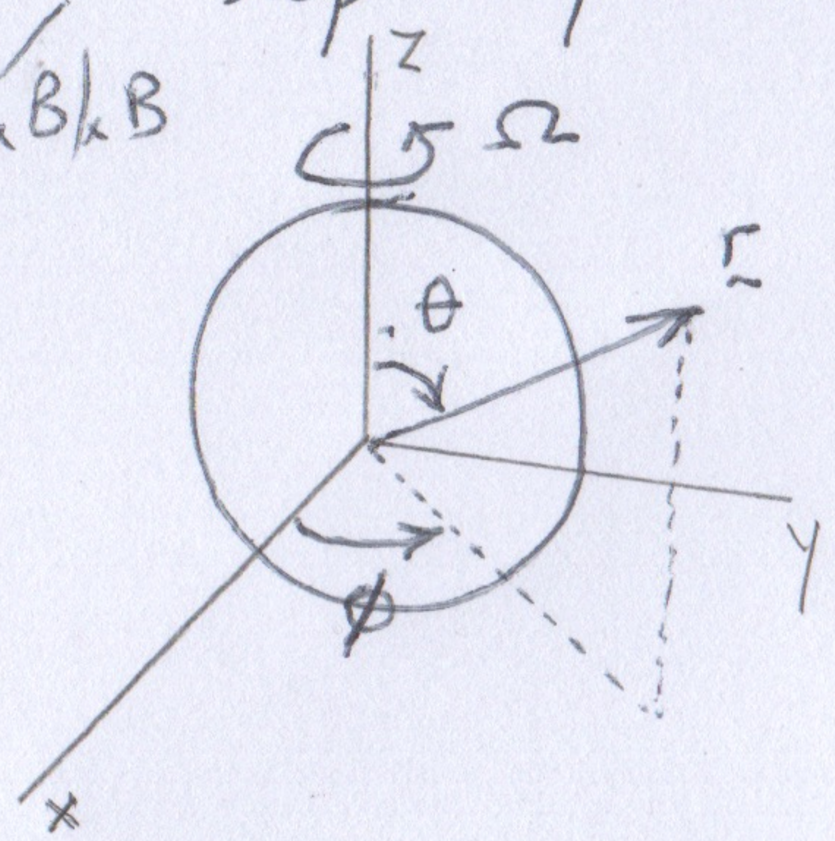
- Las ecs. MHD estacionarias son

$$\cancel{\partial_t \rho} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{u}) = 0$$

$$\rho\left(\cancel{\partial_t \underline{u}} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{u}\right) = -\underline{\nabla} p + \cancel{\frac{1}{4\pi}(\nabla\times B)\times B}$$

$$\cancel{\partial_t \underline{B}} - \underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B}) = 0$$

- Es decir que $\underline{B} \parallel \underline{u}$
- El Sol rota con $\underset{\sim}{\Omega}$.



- En un sistema co-rotante con el Sol:

$$u_r = u(r) \qquad u_\theta = 0 \qquad u_\phi = -\Omega r \sin\theta$$

- En el sistema co-rotante $\underline{u} \parallel \underline{B}$ y las líneas de $\underline{B}$ estan congeladas a la superficie solar:

$$\frac{B_r}{B_\phi} = \frac{u_r}{u_\phi} = \frac{u(r)}{-\Omega r \sin\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dr}{d\phi}$$

- Las líneas en el plano de la eclíptica $(\theta = \pi/2)$ suponiendo $u(r) \simeq cte$ (muy lejos del pto. crítico)

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi} = -\frac{u}{\Omega r} \longrightarrow r - r_0 = -\frac{u}{\Omega}(\phi - \phi_0)$$

- Usando $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \begin{cases} B_r = B(r_0,\theta,\phi_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \\ B_\theta = 0 \\ B_\phi = -B(r_0,\theta,\phi_0)\,\frac{\Omega r_0^2}{u r}\sin\theta \end{cases}$$