Clase anterior

- Ecuaciones MHD. Descripción fluidística de plasmas.

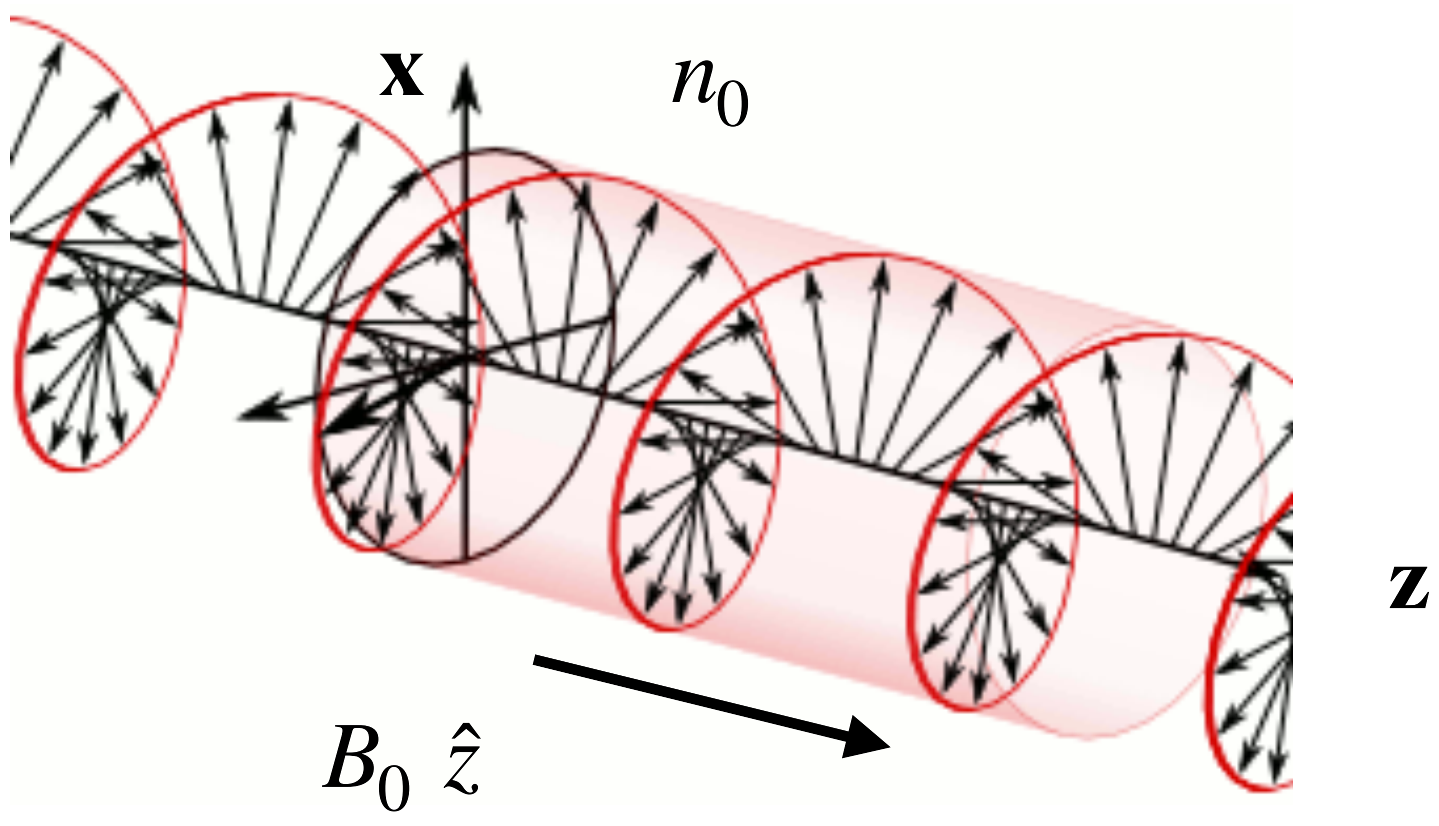
- Fuerzas de presión y tensión magnética.

- Ondas MHD incompresibles: ondas de Alfven.

- Rol de la presión magnética en el colapso gravitatorio.

- Modelo MHD de viento solar: espiral de Parker.

Rotación de Faraday



- La rotación de Faraday es una rotación del plano de polarización de una onda EM linealmente polarizada al propagarse a lo largo de un campo magnético en presencia de un plasma.
- El campo $\underline{E}$ asociado al pasaje de una onda EM a través de un plasma, pone en movimiento a los electrones y por lo tanto induce una corriente $\underline{J} = - e\, n_o\, \underline{v}$

- A primer órden en $\underline{E}, \underline{B}, \underline{v}, \underline{J}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \underline{B}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\partial_t \underline{E} \qquad \underline{J} = -e n_0 \underline{v}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{E}$$

$$m\dot{\underline{v}} = -e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v} \times (B_0 \hat{z})\right)$$

- Suponemos que todas las cantidades perturbadas satisfacen $f \sim e^{ikz - i\omega t}$

$$k\,\hat{z} \times \underline{E} = \frac{\omega}{c}\underline{B}$$

$$k\,\hat{z} \times \underline{B} = -\frac{\omega}{c}\underline{E} + \frac{4\pi e n_0}{c} i \underline{v}$$

$$B_z = 0 = E_z$$

$$m\omega \underline{v} = -ie\left(\underline{E} + \frac{B_0}{c}\underline{v} \times \hat{z}\right) \qquad \text{Sup } v_z(0) = 0$$

- Los campos satisfacen $\underline{E}, \underline{B}, \underline{v} \perp \hat{z}$
- Verifiquen que se llega a

$$\begin{pmatrix} \omega\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2}\right) & i\omega_c \\ -i\omega_c & \omega\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2}\right) \end{pmatrix} \underline{E} = 0$$

donde $\omega_c = \frac{eB_0}{mc}$: frecuencia de ciclotrón

$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$: frecuencia de plasma

- La relación de dispersión resulta:

$$\det(\ ) = 0 \longrightarrow \omega\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2}\right) = \pm\omega_c$$

- La polarización está dada por $\pm\omega_c E_x + i\,\omega_c E_y = 0$

$\therefore\ E_y = \pm i E_x$ pol. circular $+ = R$, $- = L$

Rotación de Faraday

- La relación de dispersión puede re-escribirse como

$$\frac{k_\pm^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)}$$

Noten que $k_- > k_+$

- Noten que en ausencia de plasma

$$n_0 = 0 \longrightarrow \omega_p = 0 \longrightarrow \omega = \pm kc$$ (onda EM en vacío)

independientemente de la presencia de $B_0 \hat{z}$.

- Los modos R, L corresponden a

$$\underline{E}^R = (\hat{x} + i\hat{y})\, e^{ik_+ z - i\omega t}$$

$$\underline{E}^L = (\hat{x} - i\hat{y})\, e^{ik_- z - i\omega t}$$

- Supongamos en $z=0$ (fuente luminosa) una onda linealmente polarizada según $\hat{x}$ ($\underline{E} \parallel \hat{x}$). Dicha onda puede descomponerse en ondas circularmente polarizadas R y L.

- La diferente velocidad de propagación de las ondas R y L, se traduce en una rotación del plano de polarización a medida que se propaga:

$$\underline{E} = \underline{E}^R + \underline{E}^L \longrightarrow \tan\beta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{i\left(e^{ik_+ z} - e^{ik_- z}\right)}{e^{ik_+ z} + e^{ik_- z}}$$

- Def. $K = \dfrac{k_- + k_+}{2}$, $\Delta = \dfrac{k_- - k_+}{2}$ $\longrightarrow$ $k_- = K + \Delta$, $k_+ = K - \Delta$

$$\tan\beta = i\,\frac{e^{-i\Delta z} - e^{i\Delta z}}{e^{-i\Delta z} + e^{i\Delta z}}$$

Es decir que $\beta = \Delta z = \dfrac{k_- - k_+}{2} z$

$$\therefore\ \beta = \frac{z}{2}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}}\right]\frac{\omega}{c}$$

- Sup. $\omega \sim kc \gg \omega_p, \omega_c \longrightarrow \dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)} \ll 1$

$$\beta \simeq \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c\,\omega^2} z$$

que puede re-escribirse como

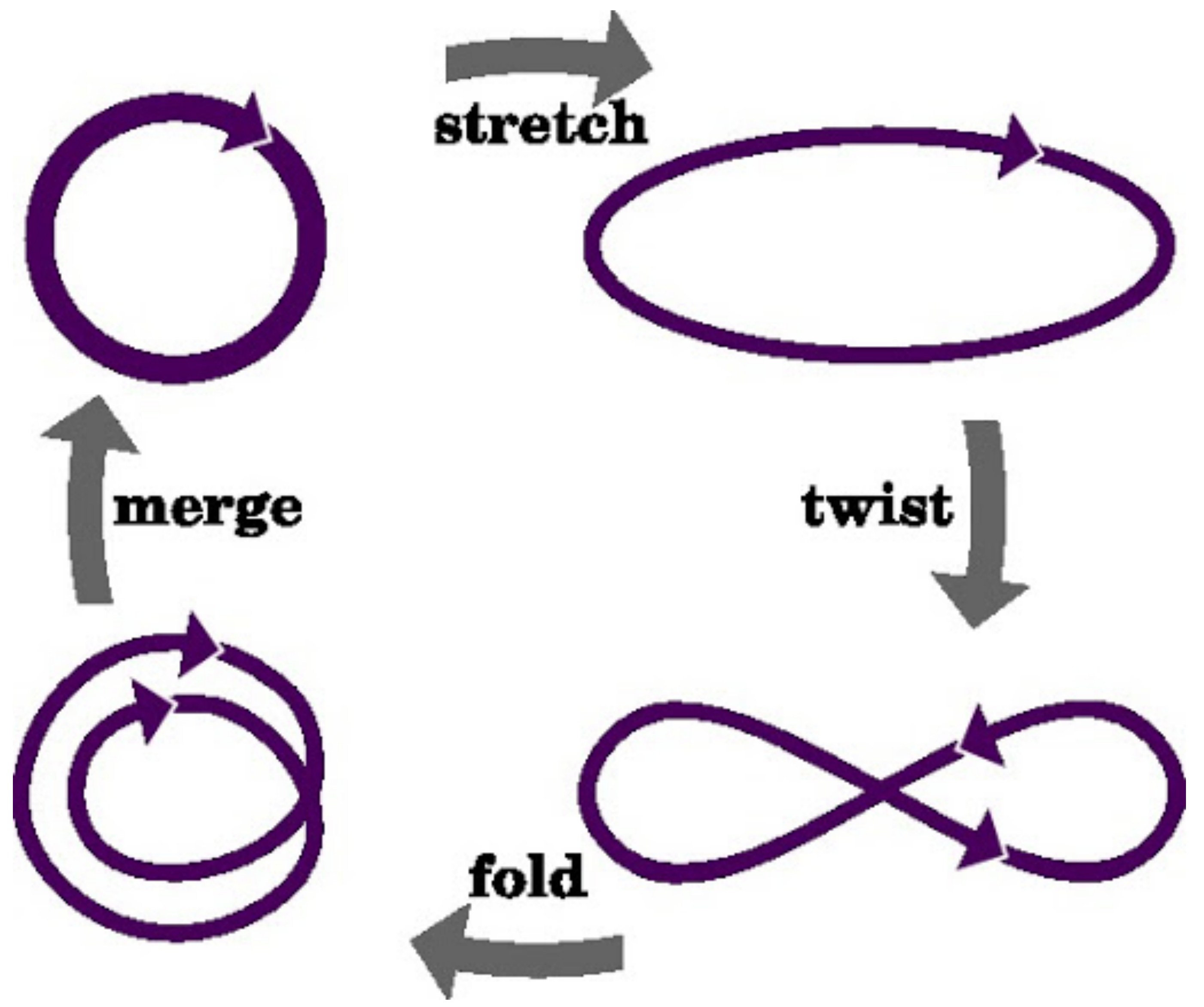
$$\beta = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^z n_e(z)\, B_\parallel(z)\, dz$$

Efecto dínamo

- Queremos estudiar ahora posibles mecanisimos de generación de campo magnético en objetos astrofísicos.
- Para ello, notemos que de la ecuación de inducción $$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

  obtenemos dos corolarios inmediatos: (i) Si $\underline{B}(t=0)=0 \quad \rightarrow \quad \underline{B}(t)=0, \quad \forall t$

  (ii) $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = L \cdot \underline{B} \quad \rightarrow \quad \underline{B} \propto \underline{B}_0 \, e^{\lambda t}$, donde λ es autovalor de L.
- Es decir que, en el marco de la MHD, si el B inicial es cero, entonces seguirá siendo cero. Pero si existe una semilla inicial B_0, aún pequeña, puede crecer exponencialmente rápido.
- Una forma de imaginar este crecimiento de B consiste en el modelo conocido como *stretch — twist — fold* , donde seguimos un tubo magnético cerrado que conserva flujo magnético y volúmen: $\Phi_0 = B\,A$, $V_0 = AL$
- En el paso de *stretch*: $L \rightarrow 2L$, $A \rightarrow A/2$, $B \rightarrow 2B$
- En el paso de *switch*, el tubo toma la forma de un "ocho", conservando su longitud.
- En el *fold*, el "ocho" se pliega sobre si mismo, si bien las lineas de B conservan longitud.
- En el *merge*, luego de una leve reconexión en el punto de cruce, recupero un tubo de area A y longitud L, pero la intensidad de su campo magnético es 2 B.

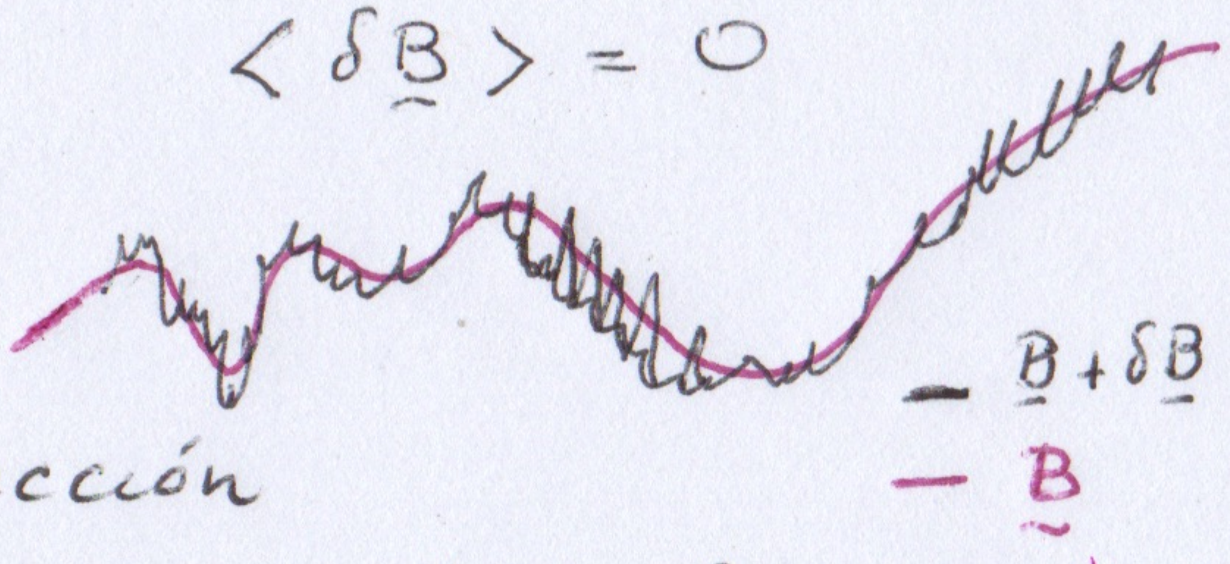


Modelo de campo medio: efecto alpha

- En 1965 Steenbeck, Krause & Radler desarrollaron un modelo de dínamo basado en teoría de campo medio. Suponen a los campos $\underline{u}$ y $\underline{B}$ como

$\underline{B} + \delta\underline{B}$ $\qquad \langle \delta \underline{B} \rangle = 0$

$\underline{B} \searrow$ macro $\qquad \delta\underline{B} \searrow$ micro



- En la ecuación de inducción

$$\partial_t(\underline{B}+\delta\underline{B}) = \underline{\nabla}\times\left[(\underline{u}+\delta\underline{u})\times(\underline{B}+\delta\underline{B})\right] + \eta_0 \nabla^2(\underline{B}+\delta\underline{B})$$

- Promediando $\langle\,\rangle$ sobre la microescala:

$$\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B}) + \underline{\nabla}\times\langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle + \eta_0 \nabla^2 \underline{B}$$

Vemos que la dinámica micro tiene un efecto sobre la macro a través de $\langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle$.

- Para tener la evolución micro, restamos las ecuaciones:

$$\partial_t \delta\underline{B} = \underline{\nabla}\times[\delta\underline{u}\times\underline{B} + \underline{u}\times\delta\underline{B}] + \underline{\nabla}\times[\delta\underline{u}\times\delta\underline{B} - \langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle] + \eta_0\nabla^2\delta\underline{B}$$

- Para continuar, en la última ecuación suponemos

(i) $R_m \gg 1 \rightarrow \eta_0 \nabla^2 \delta\underline{B} \simeq 0$

(ii) $\underline{u} = 0 \rightarrow$ en el ref. del fluido

(iii) $\delta\underline{u}\times\delta\underline{B} - \langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle \simeq 0$

$$\therefore\ \partial_t \delta\underline{B} \simeq \underline{\nabla}\times(\delta\underline{u}\times\underline{B}) = (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\delta\underline{u} - (\delta\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}$$

- Suponemos que el campo de velocidades micro es turbulento y τ es su tiempo de correlación. Entonces

$$\delta\underline{B} \simeq \tau(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\delta\underline{u} - \tau(\delta\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}$$

- Con esta expresión, calculamos $\langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle$, que podemos interpretar como una fem generada por la dinámica de la microescala:

$$\underline{E}_{fem} = -\frac{1}{c}\langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle$$

$$E_i = -\frac{1}{c}\langle\delta\underline{u}\times\delta\underline{B}\rangle_i = -\frac{\tau}{c}\varepsilon_{ijk}\langle\delta u_j\,\partial_\ell\,\delta u_k\rangle B_\ell + \frac{\tau}{c}\varepsilon_{ijk}\langle\delta u_j\,\delta u_\ell\rangle\,\partial_\ell B_k$$

Modelo de campo medio: efecto alpha

- Noten que podemos reescribir los dos términos de la ecuación anterior como:

$$\langle \delta \underline{u} \times \delta B \rangle_i = \alpha_{il} B_l + \beta_{ilk} \partial_l B_k$$

donde

$$\alpha_{il} = \tau \, \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \, \partial_l \, \delta u_k \rangle$$

$$\beta_{ilk} = -\tau \, \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \, \delta u_l \rangle$$

- Si la turbulencia micro puede suponerse isótropa, los tensores $\underline{\underline{\alpha}}$ y $\underline{\underline{\underline{\beta}}}$ deben satisfacer:

$$\alpha_{il} = \alpha \, \delta_{il} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{3} \alpha_{ii} = -\frac{\tau}{3} \langle \delta \underline{u} \cdot \nabla \times \delta \underline{u} \rangle$$

$$\beta_{ilk} = -\beta \, \varepsilon_{ilk} \longrightarrow \beta = \frac{\tau}{3} \langle |\delta \underline{u}|^2 \rangle$$

donde usamos $\alpha_{ii} = \tau \, \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \, \partial_i \, \delta u_k \rangle$

$$= \tau \langle \delta u_j \, \varepsilon_{jki} \, \partial_i \, \delta u_k \rangle = -\tau \langle \delta u_j \, \delta \omega_j \rangle$$

- Para β usamos (i) $\varepsilon_{ilk} \varepsilon_{ilk} = 6$

(ii) $\varepsilon_{ilk} \varepsilon_{ijk} = 2 \delta_{lj}$

- Entonces, la dinámica macro resulta:

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \nabla \times (\alpha \, \underline{B}) + (\eta_0 + \beta) \nabla^2 \underline{B}$$

- El efecto α puede producir un incremento exponencial de $\underline{B}$, donde

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \delta \underline{u} \cdot \nabla \times \delta \underline{u} \rangle$$

Para ello se requiere un flujo turbulento helicoidal, es decir, con $\delta \underline{u} \parallel \nabla \times \delta \underline{u}$. Las líneas de corriente son como tirabuzones, con una chiralidad preferencial.

- El efecto β tambien es un impacto de la dinámica micro sobre la macro, que se traduce en una mayor resistividad: $\eta_{eff} = \eta_0 + \frac{\tau}{3} \langle |\delta u|^2 \rangle$