Astrofísica - 1er Cuatrimestre 2024

Práctica 6: Estructura y evolución estelar

Problema 1. La energía de ligadura B de un núcleo de masa m con Z protones y $A-Z$ neutrones se define como $B = c^2[Zm_p + (A-Z)m_n - m]$, donde m_p es la masa del protón y m_n la del neutrón. Busque en la literatura las masas de los isótopos más estables de cada elemento y grafique la energía de ligadura por nucleón B/A en función de A. Discuta, a partir de este gráfico, qué reacciones nucleares proceden en forma espontánea en las estrellas, y por qué la fuente de energía de éstas se agota cuando su núcleo está compuesto de ^{56}Fe.

Problema 2. Considere una estrella esférica de masa M y radio R.
(a) Escriba la ecuación de equilibrio hidrostático para la estrella, usando como variable independiente m, la masa contenida en una esfera de radio r ($dm = 4\pi\rho r^2 dr$, siendo ρ la densidad).
(b) Usando la ecuación obtenida en el punto anterior y escribiendo la energía interna por unidad de masa del gas como $u = 3p/(\rho n)$, con p la presión y n una constante, demuestre el teorema del virial, $nE_i + E_g = 0$, donde E_i y E_g son la energía interna y gravitatoria totales de la estrella.
(c) Muestre que una estrella compuesta por un gas ideal en equilibrio hidrostático se comporta como un sistema de calor específico negativo, es decir $c_g = dE/dT < 0$, donde c_g es el llamado *calor específico gravotérmico*.
(d) Demuestre que si una estrella formada por un gas ideal se contrae en forma cuasiestacionaria, se calienta, y lo contrario ocurre cuando se expande.
(e) Explique a partir del resultado anterior cómo logra la estrella alcanzar la fusión del He luego de acabar su combustible de H (el mismo razonamiento se aplica a etapas posteriores, como la fusión del C y el O después del He).
(f) Cualitativamente, explique por qué las etapas de fusión que logre alcanzar la estrella dependen de su masa inicial.

Problema 3. Para una estrella de masa M y radio R cuyo material cumple una relación politrópica entre la presión p y la densidad ρ, $p = K\rho^\gamma$ con K constante, las ecuaciones de equilibrio mecánico pueden desacoplarse de las de transporte de energía, obteniéndose la ecuación de *Lane–Emden*,

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\psi}{dx}\right) + \psi^n = 0 \quad ,$$

donde $r = \alpha x$ es la coordenada radial, $\rho = \rho_0\psi^n$ siendo ρ_0 la densidad central, y γ y n son constantes llamadas exponente e índice politrópico respectivamente, relacionadas por $\gamma = 1 + 1/n$.
(a) Deduzca la ecuación de Lane–Emden a partir de la de equilibrio hidrostático y la expresión de la masa $m(r)$ contenida en una esfera de radio r. Discuta cuáles son las condiciones de contorno apropiadas para esta ecuación.
(b) Muestre que las constantes α, K y ρ_0 se relacionan por $4\pi G\alpha^2 = K(n+1)\rho_0^{-1+1/n}$, siendo G la constante de gravitación universal ¿Cuántos grados de libertad tiene un modelo politrópico con n fijo? Note que K puede ser un parámetro libre en algunos casos, o estar determinado por la ecuación de estado en otros.

(c) Encuentre una solución analítica aproximada a la ecuación de Lane–Emden a través de un desarrollo de Taylor en potencias pares hasta orden seis, que verifiquen las condiciones de contorno apropiadas. Es decir, calcule los coeficientes b_2, b_4 y b_6 en $\psi(x) = 1+b_2x^2+b_4x^4+b_6x^6$, en términos del índice politrópico n. Grafique los perfiles de densidad y presión obtenidos para $n = 0$, 1.5, 3 y 4.5. Considere admisible para x sólo el intervalo $[0, x_1]$, donde x_1 es la primera raíz de $\psi(x)$.
(d) Para los modelos del punto anterior, considerando que el gas es ideal, grafique el perfil de temperatura y, considerando transporte radiativo, la tasa de producción de energía por fusión $\epsilon(r)$ y la luminosidad $l(r)$. Si se define el núcleo de la estrella como la zona central que genera el 90 % de la energía, calcule para cada modelo qué fracción de la masa y del radio de la estrella ocupa el mismo.
(e) Muestre que la masa de una polítropa es

$$M = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left[\frac{(n+1)K}{G}\right]^{3/2}\left(x^2\frac{d\psi}{dx}\right)_{x_1}\rho_0^{\frac{3-n}{2n}} \quad .$$

(f) Las enanas blancas están constituídas por un gas de Fermi no relativista. A partir de la ecuación de estado de este gas, muestre que estas estrellas pueden describirse por modelos politrópicos con n =1.5 y K fijo. Resuelva numéricamente la ecuación de Lane–Emden para este caso, encuentre x_1 y $d\psi/dx(x = x_1)$, y muestre que hay una relación entre el radio R y la masa M de una enana blanca. Discuta qué ocurre cuando $M \to \infty$.
(g) Cuando el radio de una enana blanca es muy pequeño, el gas de Fermi se vuelve relativista. Muestre que ahora la estrella puede describirse por una polítropa con $n = 3$, y que su masa está fija. Esto implica que existe un límite superior (llamado de *Chandrasekhar*) para la masa de una enana blanca. Encuentre el valor de este límite para una enana blanca compuesta por carbono y oxígeno.

Problema 4. Para una estrella de masa M, radio R y luminosidad L, pueden definirse las escalas de tiempo hidrodinámica, $\tau_H = \sqrt{R^3/(GM)}$, de *Kelvin–Helmholtz*, $\tau_{KH} = GM^2/(LR)$ y nuclear, $\tau_n = QMc^2/L$, donde G es la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz, y Q la fracción de masa transformada en energía por las reacciones nucleares.
(a) Calcule las tres escalas de tiempo para el Sol, sabiendo que su principal fuente de energía es la fusión del hidrógeno, para la cual Q =0.007.
(b) Discuta el significado de estas escalas de tiempo y analice si tiene sentido utilizar modelos en equilibrio hidrostático para las estrellas como el Sol.

Problema 5. Para que dos núcleos se fusionen, es necesario que se acerquen a distancias del orden de $r_0 = 10^{-15}$ m, donde la fuerza nuclear fuerte domina. Para ello deben atravesar la barrera de potencial generada por la repulsión Coulombiana, cuya altura es del orden de $E \sim kZ_1Z_2e^2/r_0$, donde Z_1 y Z_2 son los números atómicos de los núcleos, k la constante en la expresión de la fuerza de Coulomb y e la carga del electrón.
(a) Compare el valor de E para la fusión de dos núcleos de hidrógeno con k_BT, donde T =1.5×10^7 K es la temperatura típica en el núcleo estelar y k_B la constante de Boltzmann. Discuta por qué la fusión ocurre a pesar de ser la energía de los núcleos mucho menor que la de la barrera, y qué importancia tiene el hecho de que el cociente entre ambas energías sea pequeño en la vida de la estrella.
(b) Considerando ahora las fusiones 4H→He, 3He→C y 2C→Mg, discuta por qué estas ocurren en etapas separadas de la vida de la estrella.

Problema 6. Describa cualitativamente por qué si la fusión nuclear en una estrella ocurre en una capa alrededor del núcleo, al contraerse éste la estrella se expande.

Problema 7. (a) Una estrella similar al Sol atraviesa en algún momento de su vida por las siguientes etapas evolutivas: gigante roja, nebulosa planetaria, subgigante, secuencia principal, enana blanca. Ordene cronológicamente las fases evolutivas de esta estrella y explique los procesos físicos dominantes en cada una de ellas ¿En qué estado evolutivo se encuentra el Sol actualmente?
(b) Un diagrama H-R, al relacionar la temperatura superficial de una estrella con su luminosidad, resulta muy útil para estudiar las secuencias evolutivas de las estrellas. Grafique en un diagrama H-R la trayectoria evolutiva de una estrella similar al Sol explicando los procesos que dan origen a ese tipo de evolución. Indique la ubicación del Sol en el diagrama H-R.
(c) Discuta sobre el destino final de las estrellas de acuerdo a su masa inicial. En particular, mencione cuáles son las secuencias evolutivas que dan origen a enanas blancas, supernovas, estrellas de neutrones y agujeros negros ¿Cuál es el destino final del Sol?