Astrofísica - 1er Cuatrimestre 2024

Práctica 9: Cosmología

Problema 1. Considere un Universo infinito, homogéneo, isótropo y eterno. La densidad numérica de galaxias en este Universo es n, y la función de luminosidad para las galaxias es $\phi(L)$, de modo tal $\phi(L)dL$ es la probabilidad de encontrar una galaxia con luminosidad entre L y $L+dL$, y $\int_0^\infty \phi(L)dL = 1$.
(a) Muestre que la distribución $\varphi(q)$ del flujo de radiación observado de una galaxia (q) es proporcional a $q^{-3/2}$, independientemente de la forma de $\phi(L)$. Discuta cómo usaría un histograma de flujos de galaxias (número de galaxias observadas con un flujo dado en función del flujo) para estimar una posible variación de n con la distancia a la Tierra.
(b) Muestre que el flujo total de radiación recibido en la Tierra es infinito, en clara contradicción con la simple observación de que el cielo es oscuro (paradoja de Olbers). ¿Qué posibles soluciones encuentra a esta paradoja?

Problema 2. Considere un Universo compuesto por un fluido homogéneo e isótropo de densidad ρ y velocidad $\vec{v}$, que evoluciona en el tiempo t ($t = 0$ es el instante actual).
(a) A partir de la ecuación de continuidad, obtenga la ley de Hubble, $\vec{v} = H(t)\vec{r}$, donde $\vec{r}$ es el vector posición y H es una función del tiempo ($H_0 = H(0)$ es la constante de Hubble). Discuta por qué esto implica que el Universo se está expandiendo, cuál es el origen de coordenadas, y de qué modo puede verificarse observacionalmente esta ley.
(b) Se define $R(t)$ mediante $H(t) = (1/R)dR/dt$. Calcule, a partir de la ecuación de continuidad, la relación entre R y ρ. Discuta cuál es el significado físico de R y por qué se suele denominar radio del Universo. ¿Implica esto que el Universo sea finito y esférico?
(c) A partir de la ecuación de Euler y de la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio, obtenga la ecuación de movimiento para R,

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3}\frac{G\rho_0 R_0^3}{R^2} \quad ,$$

donde G es la constante de gravitación universal, y ρ_0 y R_0 son la densidad y el radio actuales del Universo, respectivamente.
(d) Integre una vez la ecuación anterior para obtener

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - k \quad ,$$

donde k es una constante que puede valer 0, 1, o -1. Discuta por qué no se consideran otros valores de k.
(e) Muestre que para $k = -1$ y 0 el Universo se expande indefinidamente, mientras que para $k = 1$ alcanza un radio máximo $R_m = 8\pi G\rho_0 R_0^3/3$ y luego se contrae.
(f) Definiendo el parámetro de densidad $\Omega = 8\pi G\rho/(3H^2)$, muestre que $k = 0$, 1 y -1 implican respectivamente $\Omega_0 = 1$, >1 y <1. Discuta el origen de la relación entre la densidad y la expansión o contracción del Universo.
(g) El fluido del Universo contiene tanto materia, que ejerce una presión p_m, como radiación, que ejerce una presión p_r. Use la ecuación de transporte de calor para mostrar que si $p_r \ll p_m$, la temperatura del fluido es $T \propto R^{-2}$, mientras que si $p_r \gg p_m$, $T \propto R^{-1}$.