Descripción hidrodinámica

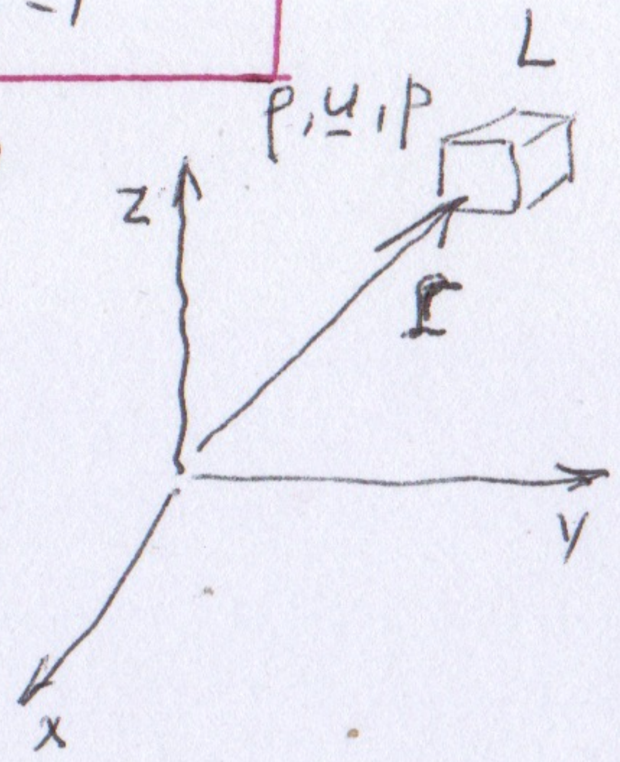
- A escalas mucho mayores que el camino libre medio, la **hidrodinámica** provee una descripción adecuada del movimiento de la materia.
- Las ecuaciones HD corresponden a los primeros momentos de la ecuación de Boltzmann. Para interpretar estas ecuaciones, se recurre a la noción de **elemento de fluído**, que es suficientemente grande como para contener muchas partículas y a la vez mucho mas pequeño que las longitudes de interés (la longitud L del diagrama anterior).

Ecuación de continuidad

$$\int d^3p\; m\,(\text{Boltzmann}) \longrightarrow \boxed{\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho \underline{u}) = 0}$$

donde $\rho = mn$: densidad de masa

Noten que la masa del sistema no cambia por colisiones y por lo tanto el término colisional no aporta.



Ecuación de movimiento

$$\int d^3p\; \underline{p}\,(\text{Boltzmann}) \rightarrow \boxed{\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla\cdot \underline{\underline{P}} + n\underline{F}}$$

donde hemos introducido la notación

$$\underset{(\text{total})}{\frac{dA}{dt}} = \underset{(\text{parcial})}{\frac{\partial A}{\partial t}} + \underset{(\text{convectiva})}{\underline{u}\cdot\nabla A}$$

$\frac{d}{dt}$: referencial del fluido

$\frac{\partial}{\partial t}$: referencial del labo

Ecuación de energía

$$\int d^3p\; \frac{mv^2}{2}(\text{Boltzmann}) \rightarrow \boxed{\frac{3}{2} n k_B \frac{dT}{dt} = -\nabla\cdot\underline{q} - \underline{\underline{P}} : \nabla\underline{u}}$$

Estas ecuaciones requieren condiciones de clausura.

Aproximación de fluido ideal

$$\underline{\underline{P}} = p\,\underline{\underline{1}}$$

$$\underline{q} = 0$$

Flujo incompresible

La ec. continuidad puede escribirse $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\,\nabla\cdot\underline{u}$

Incompresible si $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (ρ permanece constante en el referencial del fluido)

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\rho \longleftrightarrow \nabla\cdot\underline{u} = 0$$

Teorema del virial

- Para estrellas u objetos esféricos cohesionados gravitatoriamente, se propone un equilibrio estático ($\underline{u} = 0$) entre la fuerza gravitatoria (atractiva) y la fuerza de presión (repulsiva).
- Esto presupone que las energías térmica y gravitatoria deben resultar comparables.

En esféricas:

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} - \rho \frac{GM_r}{r^2}\hat{r}$$

donde $M_r = \int_0^r dr\, 4\pi r^2 \rho(r)$ es la masa contenida en esfera de radio r

$$\therefore \quad \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

Si multiplicamos por $4\pi r^3$ e integramos en toda la estrella de radio R:

$$\int_0^R dr\, 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} = \int_0^R dr\, 4\pi r^3 \left(-\rho \frac{GM_r}{r^2}\right)$$

Integrando el lado izquierdo por partes ($y\, p(R) = 0$)

$$-\int_0^R dr\, 4\pi r^2 (3p) = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \left(-\frac{\rho G M_r}{r}\right) \quad (*)$$

donde $E_G = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \left(-\frac{GM_r \rho}{r}\right)$: energía gravitatoria

- Para un gas ideal $p = n k_B T$
- $\frac{3}{2} k_B T$ es la energía térmica por partícula de un gas monoatómico. Entonces la energía térmica es

$$E_T = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 \left(\frac{3}{2} n k_B T\right)$$

La ecuación (*) resulta:

$$-2E_T = E_G \longrightarrow \boxed{2E_T + E_G = 0}$$

Teorema del virial

Noten que $E_G \leq 0$, entonces

$$E_T = -\frac{1}{2} E_G = \frac{1}{2}|E_G|$$

y la energía total del sistema resulta

$$E = E_T + E_G = \frac{E_G}{2} = -\frac{1}{2}|E_G| \leq 0$$

Equilibrio hidrostático

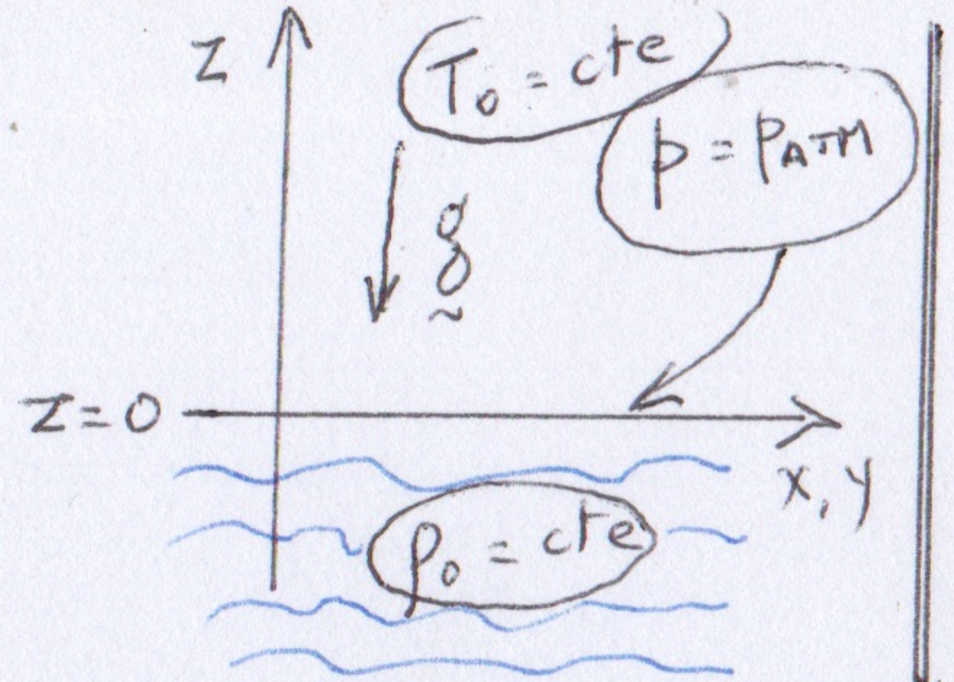
- Como primera aplicación, veamos dos tipos de equilibrios hidrostáticos ($\underline{u} = 0$).
- Caso a: fluído incompresible (agua —> océanos). Caso b: fluído ideal isotérmico (aire —> atmósfera).

Caso a $(z \leq 0)$

$\rho_0 = cte$ (incompresible)

$$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g$$

$$\hat{x}, \hat{y}: \quad 0 = -\underline{\nabla}_\perp p \longrightarrow p = p(z)$$



$$\therefore \quad p = -\rho_0 g z + cte$$

Para determinar la cte de integración, usamos que en la superficie tenemos equilibrio con la atmosfera:

$$p(z=0) = p_{ATM} \longrightarrow p(z) = p_{ATM} - \rho_0 g z$$

Es decir que la presión crece linealmente con la profundidad $(-z)$.

Caso b $(z \geq 0)$

El aire no es incompresible, pero podemos suponer un gas ideal isotérmico

$$p = \rho \frac{k_B T_0}{m}$$

m: masa molecular media del aire

$$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g$$

$$\rho = \frac{m}{k_B T_0} p \longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{m g}{k_B T_0} dz = -\frac{dz}{H}$$

$H = \frac{k_B T_0}{m g}$: escala de alturas

$$\therefore \quad p(z) = p_{ATM}\, e^{-z/H} \qquad \rho(z) = \frac{m\, p_{ATM}}{k_B T_0} e^{-z/H}$$

La presión y densidad de la atmósfera decrecen exponencialmente en alturas del orden de

$$H = \frac{k_B T_0}{m g}$$

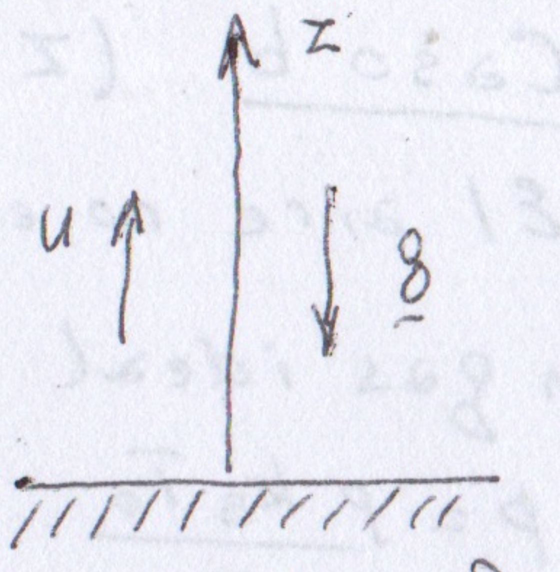
Atmósfera convectiva

- Supongamos ahora una atmósfera en estado estacionario con flujos solo en la dirección vertical.
- El movimiento vertical conlleva una forma de transporte de energía llamado convectivo.

Ec. cont.: $\partial_z (n u) = 0$

Ec. mov.: $p(z) \simeq p_0 \, e^{-z/H}$

(para flujos subsónicos $\rho \frac{du_z}{dt} \ll \partial_z p$)



$\partial_t = 0 = \partial_x = \partial_y$

Ec. energía: $\frac{3}{2} n k_B u \frac{\partial T}{\partial z} = -p \frac{\partial u}{\partial z}$

(sup. $\underset{\sim}{q} \cong 0$)

Ec. estado: $p = n k_B T$

Entonces:

$$\frac{u'}{u} + \frac{n'}{n} = 0$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} + \frac{T'}{T} = -\frac{1}{H}$$

$$\frac{3}{2} n k_B \cancel{u} T' + p \cancel{u} \left(\frac{1}{H} + \frac{T'}{T}\right) = 0$$

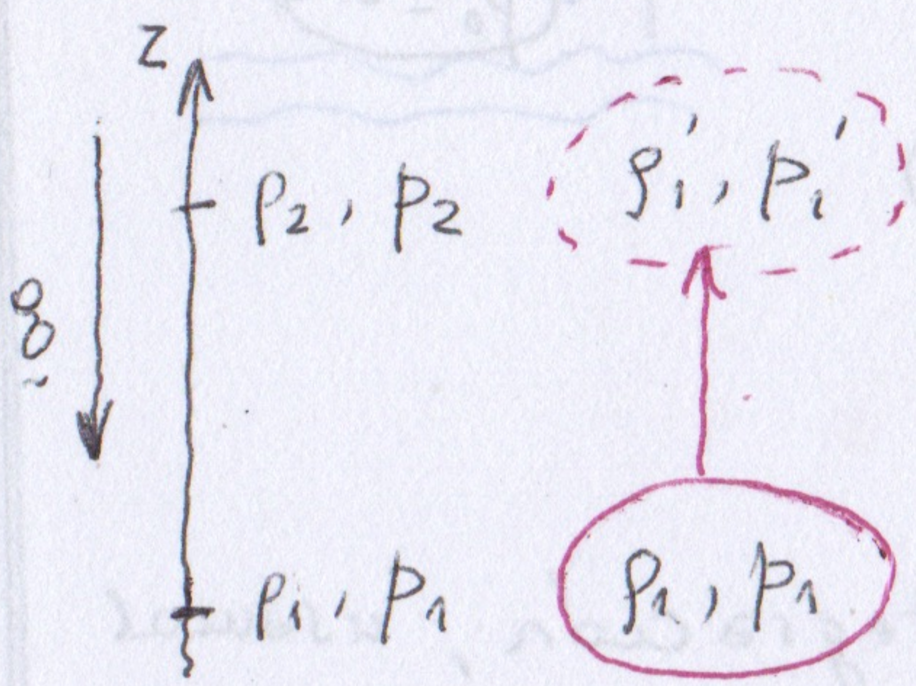
$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2mg}{5k_B} = -\frac{g}{c_p}$$

En el referencial del fluido

$$\frac{dT}{dt} = u\frac{dT}{dz} = -\frac{gu}{c_p}$$

$\frac{dT}{dt} = -\frac{gu}{c_p}$: $u > 0$ (ascenso) $\rightarrow \frac{dT}{dt} < 0$ (se enfría); $u < 0$ (descenso) $\rightarrow \frac{dT}{dt} > 0$ (calienta)

CRITERIO DE SCHARZSCHILD



- Supongamos que una gota con (ρ_1, p_1) asciende a una zona con (ρ_2, p_2) tomando valores (ρ_1', p_1').
- Sup. que inmediatamente alcanza balance de presión $p_1' = p_2$
- Sup. que asciende adiabáticamente $\rho_1' = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}$

El criterio de Scharzschild establece

$\rho_1' > \rho_2 \longrightarrow$ estable (peso > empuje)

$\rho_1' < \rho_2 \longrightarrow$ inestable (peso < empuje)

En el segundo caso se pone en marcha una *inestabilidad convectiva*.