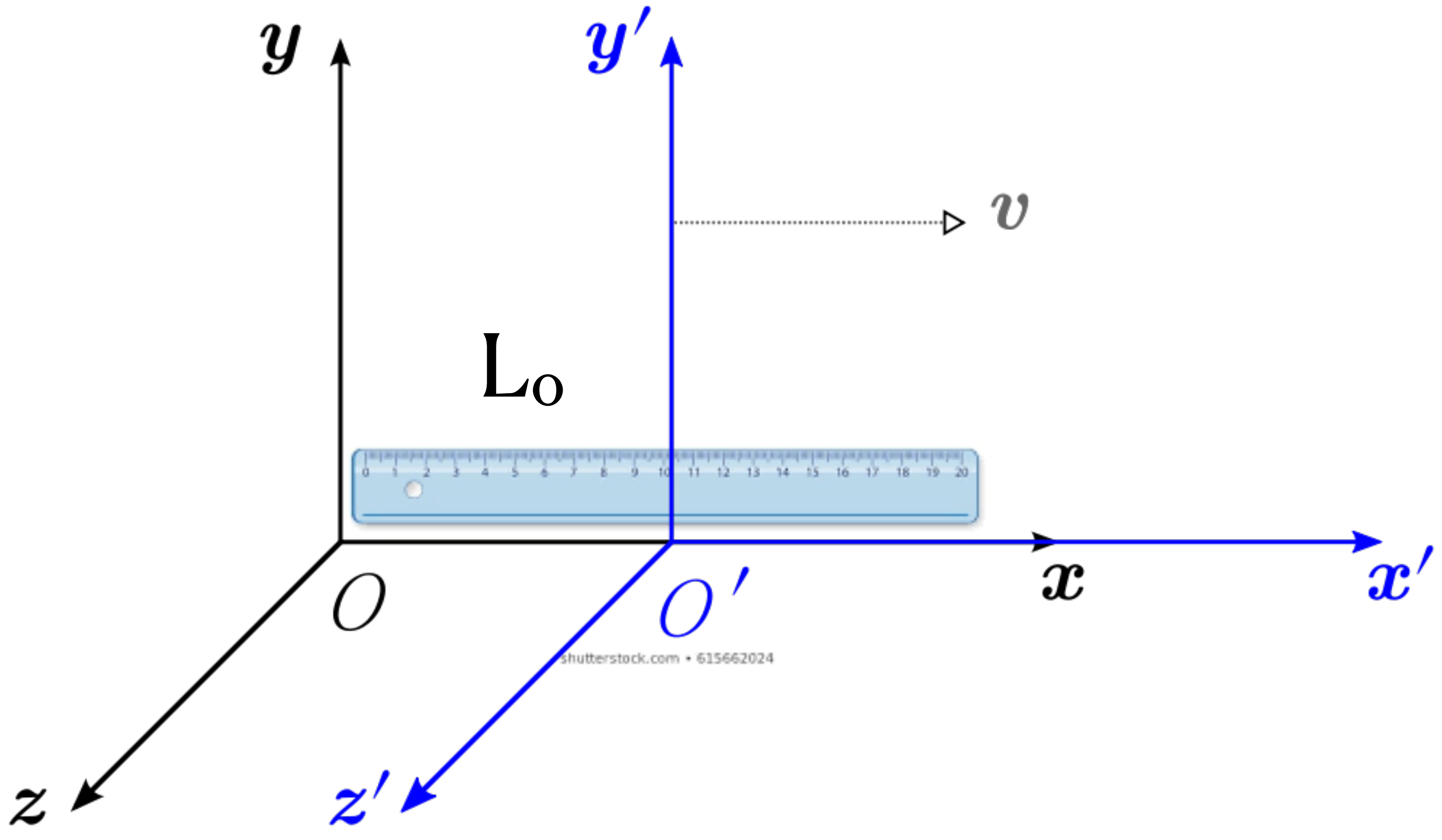
Teoría especial de la relatividad

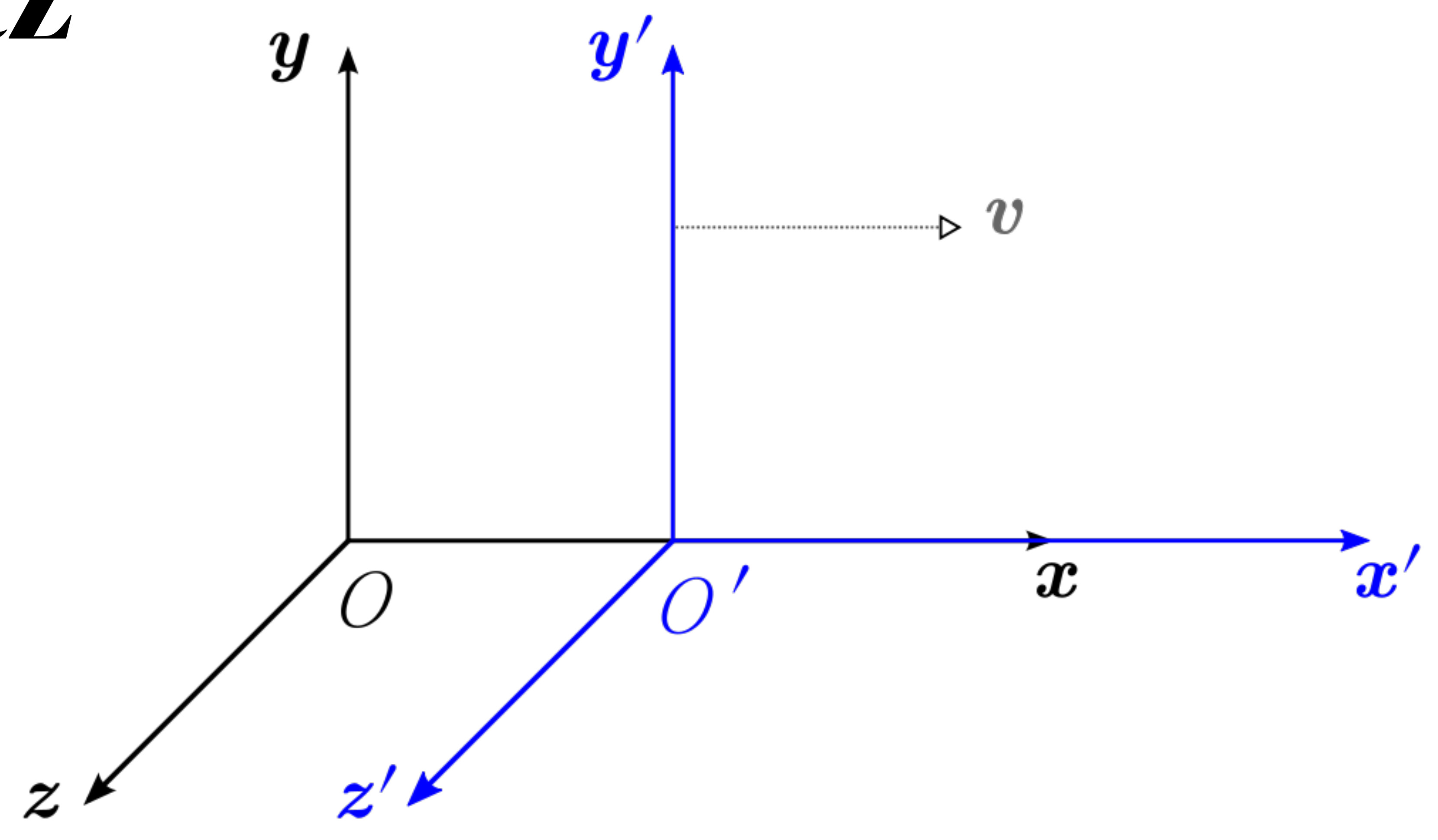
- En Mecánica Clásica damos por hecho que: (a) el tiempo es absoluto e independiente del observador, (b) la longitud de un objeto es una propiedad intrínseca del mismo.
- Asimismo, afirmamos que las leyes de la Mecánica son las mismas para todo **observador inercial**, y las conversiones de coordenadas cumplen las **transformaciones de Galileo**.
- La velocidad de la luz **c**, sin embargo, es independiente del observador y no sigue las transf. Galileo.
- Albert Einstein (1905) enuncia la *Teoría Especial de la Relatividad*, basada en estos postulados:

  (1) Las leyes físicas (Mecánica, Óptica, EM, ...) valen en todos los sistemas inerciales.
  (2) La luz se propaga en vacío con una velocidad definida c, independiente de la fuente emisora.



- Tenemos una regla de longitud L_0 en reposo para el observador O. Esa es la **longitud propia** de la regla, porque fue medida en un sistema en reposo.
- O´se mueve a velocidad v=cte respecto de O. El observador O mide el tiempo entre que O´cruza uno y otro extremo de la regla y obtiene $T = \dfrac{L_0}{v}$.
- O' ve la regla moviendose a -v. El tiempo que mide entre los extremos de la regla es $T_0 = \dfrac{L}{v}$. La longitud que observa O´es L, no es la longitud propia. En cambio T_0 es el **tiempo propio**, ya que fue medido en el sistema en reposo (en el orígen de O´).
- De lo anterior se infiere que $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{L_0}{L}$, pero $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{L_0}{L} \neq 1$ en general.

Transformación de Lorentz



- En Mecánica Clásica suponemos que $T=T_o$, lo cual implica tambien que $L=L_o$.

- Suponiendo homogeneidad espacial y temporal además de isotropía, ambos cocientes solo pueden ser función de v , la cual puede determinarse por experimentos y obtener que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{L_0}{L} = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- **Dilatación temporal**: $T = T_0\,\gamma(v)$ significa que el tiempo T entre dos eventos medido por un observador moviendose con v, es mayor que el tiempo propio T_o.

- **Contracción de longitudes**: $L = L_0/\gamma(v)$ significa que la longitud L de un objeto medido por un observador moviendose con v, es menor que la longitud propia L_o.

De lo anterior se deducen las transformaciones de Lorentz que rigen los cambios de coordenadas entre observadores inerciales:

$$x' = \gamma(v)\,(x - vt)$$

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Para la transf. inversa basta invertir los roles entre los observadores

$$\left.\begin{array}{l} x,t \longleftrightarrow x',t' \\ v \longleftrightarrow -v \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x = \gamma(v)\,(x' + vt') \\ t = \gamma(v)\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{array}$$

Si $x(t)$ es la posición de un punto, su velocidad es $U_x = \frac{dx}{dt}$. Para el observador O' es $U'_x = \frac{dx'}{dt'}$

Diferenciando las relaciones anteriores

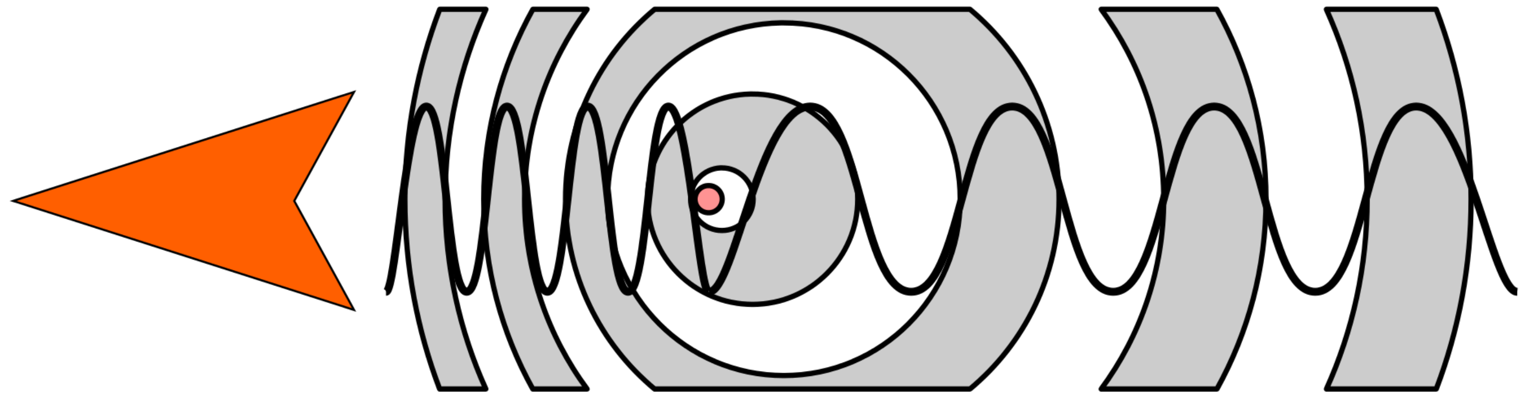
$$U'_x = \frac{U_x - V}{1 - \frac{VU_x}{c^2}}$$

Noten que como $dt' \neq dt$, tambien se modifican las otras componentes de la velocidad

$$U'_{y,z} = \frac{U_{y,z}}{\gamma(v)\left(1 - \frac{VU_x}{c^2}\right)}$$

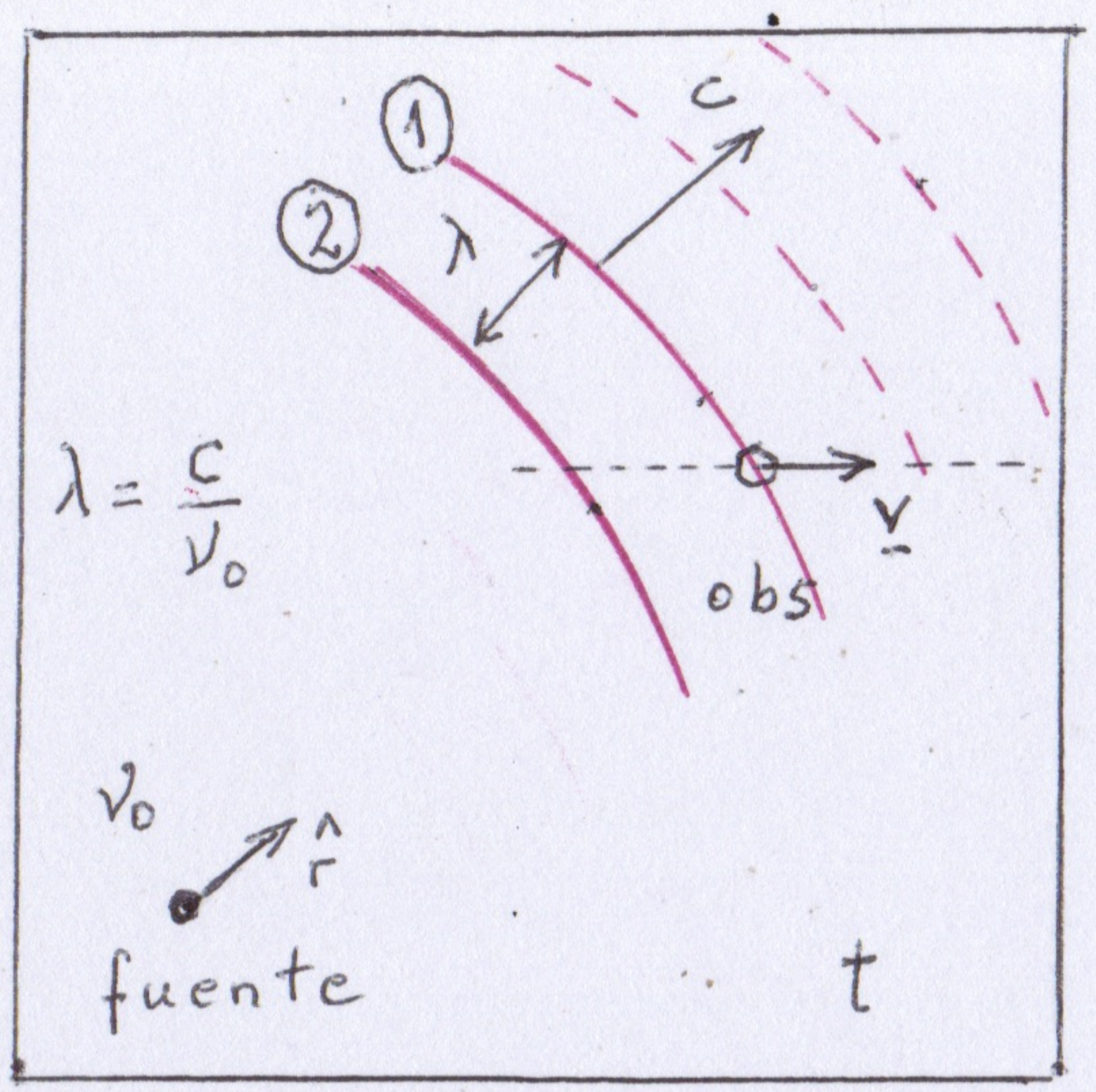
Efecto Doppler

- El efecto Doppler (1842) corresponde a un cambio de frecuencia cuando la fuente se mueve respecto del observador. Ocurre para cualquier fenómeno ondulatorio (sonido, luz, ...).

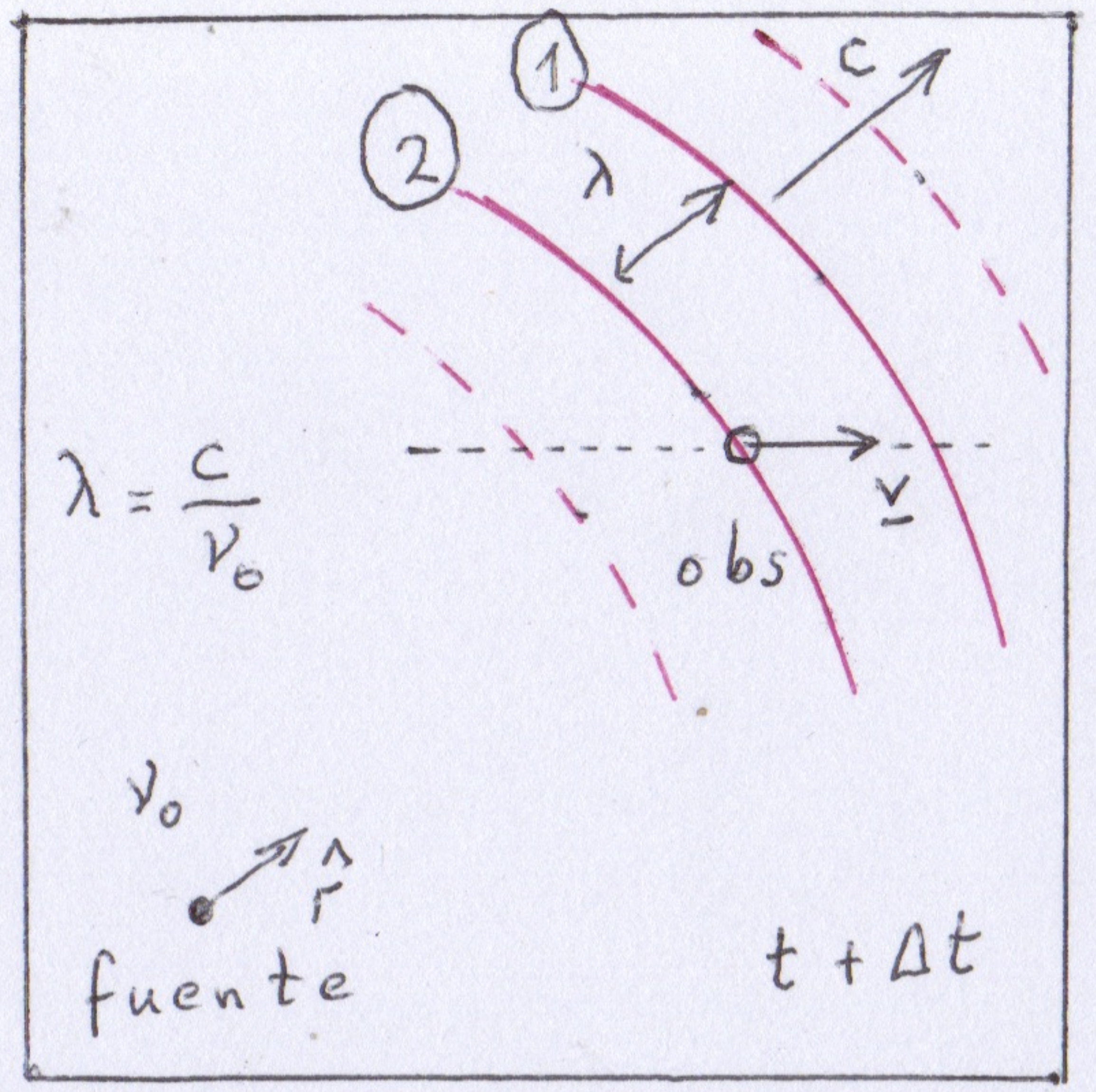


- Es un fenómeno clásico, pero que tiene correcciones en el límite relativista $v \approx c$.

- Supongamos una fuente luminosa que emite frentes esféricos a la **frecuencia propia** ν_0 .



El observador se mueve con $\underline{v}$ y es alcanzado por el frente ①.



Un Δt despues, observador y frentes se desplazan y el obs. es alcanzado por ②.

Por lo tanto: $c\,\Delta t = \lambda + \underline{v}\cdot\hat{r}\,\Delta t \xrightarrow[\lambda = \frac{c}{\nu_0}]{} \Delta t = \dfrac{c/\nu_0}{c - \underline{v}\cdot\hat{r}}$

- En el caso clásico Δt es el mismo para fuente y obs. Como $\Delta t = \frac{1}{\nu_{obs}} \longrightarrow \boxed{\nu_{obs} = \nu_0\left(1 - \frac{\underline{v}\cdot\hat{r}}{c}\right)}$

  Doppler clásico

- El Doppler clásico indica que si la fuente se aleja ($\underline{v}\cdot\hat{r} > 0$) entonces $\nu_{obs} < \nu_0$, es decir que la frecuencia medida se corre al rojo.

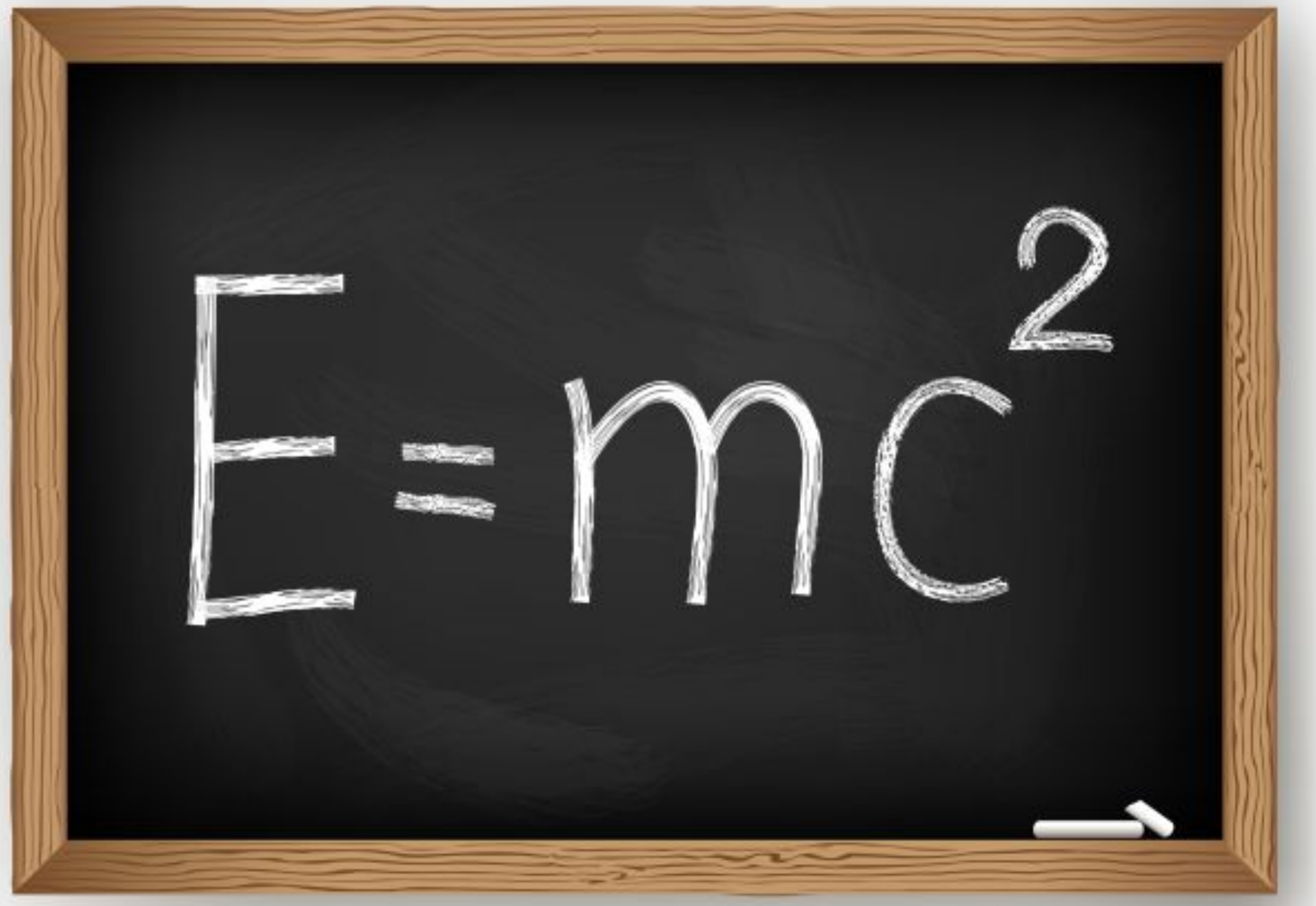
- Si la fuente se acerca ($\underline{v}\cdot\hat{r} < 0$) es $\nu_{obs} > \nu_0$ y el corrimiento es al azul.

- En el caso relativista ($v \sim c$) es $\frac{\Delta t}{\Delta t_{obs}} = \gamma(v)$ ya que Δt_{obs} es el tiempo propio entre ambos eventos. Como $\Delta t_{obs} = \frac{1}{\nu_{obs}} \longrightarrow \boxed{\nu_{obs} = \nu_0 \frac{\left(1 - \frac{\underline{v}\cdot\hat{r}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$

  Doppler relativista

- El efecto relativista es enfatizar el corrimiento en frecuencia ya que $\gamma > 1$.

Dinámica relativista



- Para extender la dinámica en el límite relativista, empezamos por redefinir el impulso lineal.
- El impulso de una partícula es $\underline{p} = m\,\gamma(u)\,\underline{u}$, puesto que es la cantidad que se conserva en colisiones de sistemas aislados.
- Conservamos la siguiente versión de ecuación de movimiento $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$
- La variación de energía cinética para una partícula que parte del reposo resulta

$$\Delta T = \int \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int \frac{d\underline{p}}{dt} \cdot \underline{u}\, dt = \int d\underline{p} \cdot \underline{u}$$

Integro por partes:

$$\Delta T = \underline{p} \cdot \underline{u}\Big|_i^f - \int \underline{p} \cdot d\underline{u}$$

$$\underline{p} = \gamma m \underline{u} \longrightarrow \Delta T = \Delta\left(\gamma(u)\, m u^2\right) - \int_0^{u^2} \frac{m}{2}\gamma(u)\, du^2$$

$$\int_0^{u^2} du^2 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -2c^2\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,\Bigg|_0^{u^2}$$

De manera que:

$$\Delta T = \Delta\left(\gamma(u)\, m c^2\right)$$

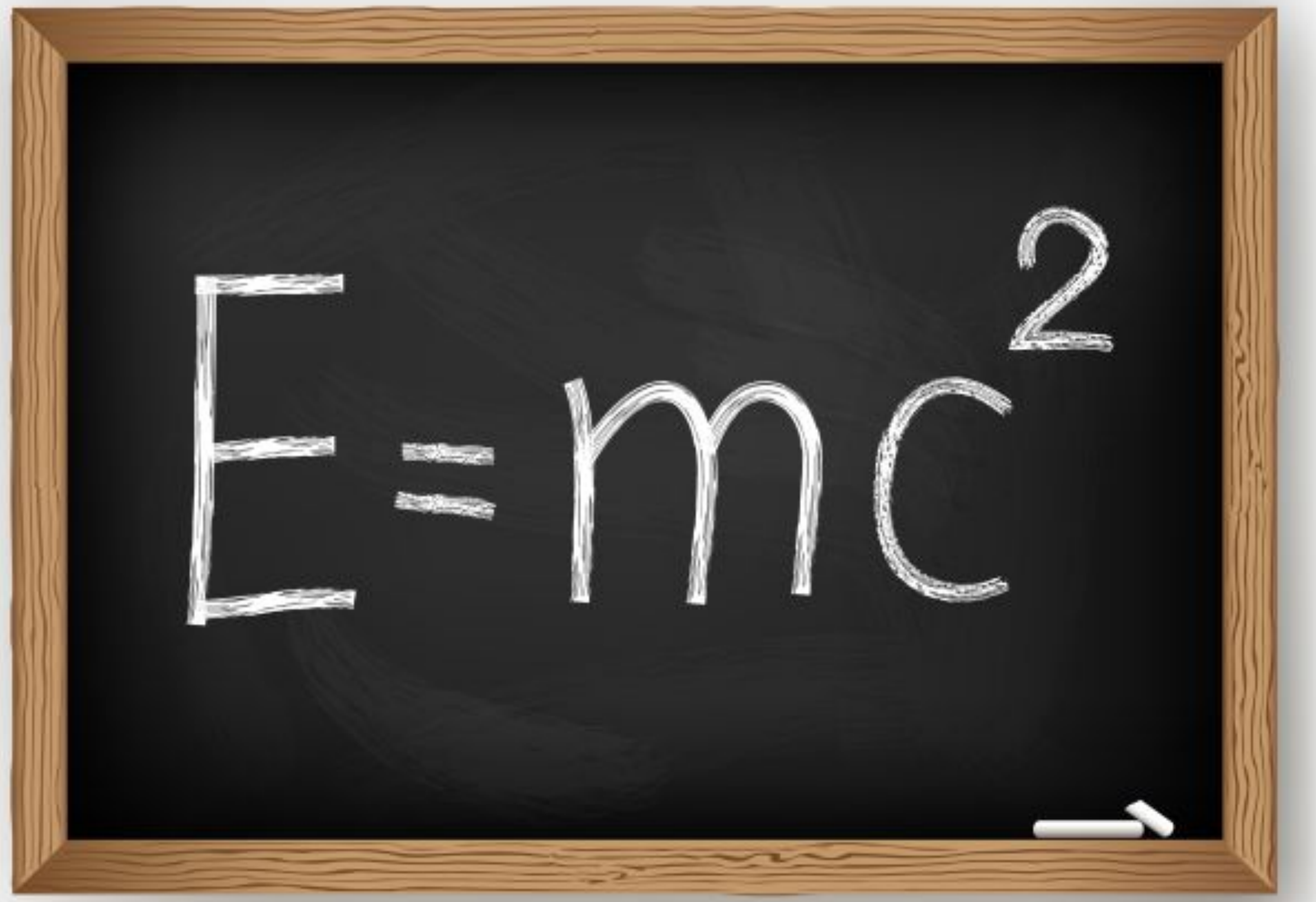
Definimos la energía de la partícula como

$$E = \gamma(u)\, m c^2$$

de manera que $\Delta T = E(u) - E(0)$

- Mirando las expresiones de p y E podemos generar la noción de masa $m(u) = m.\gamma(u)$ donde m pasa a ser la <u>masa en reposo</u>.
- Entonces $E(u) = m(u)\, c^2$ expresa una equivalencia entre la masa relativista y la energía.

Dinámica relativista



- Aparece tambien la noción de **masa en reposo** de una partícula. Una partícula que no se mueve, tiene una energía $E = m\,c^2$.
- Para velocidades bajas respecto de c, podemos desarrollar en Taylor al órden mas bajo y obtener
$$E \;=\; m\,.\,c^2\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;\approx\; m\,.\,c^2\,(1+\frac{u^2}{2c^2})$$
con lo cual tenemos que E es la energía en reposo mas la versión clásica de energía cinética.
- Una relación que nos va a resultar útil es expresar la energía E en función del impulso y no de la velocidad :

$$E = \gamma m c^2 \longrightarrow E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$E^2 - E_0^2 = m^2c^4\left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right) \qquad \beta = \frac{u}{c}$$

$$\therefore\; E^2 - E_0^2 = \gamma^2\beta^2 m^2 c^4$$

$$\underset{\sim}{p} = \gamma m \underset{\sim}{u} \longrightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 \beta^2 c^2$$

$$\therefore\; E^2 - E_0^2 = c^2p^2$$

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

- Esto muestra que objetos sin masa en reposo como los fotones, tambien tienen energía ($E_{fot} = cp$).

Función de distribución de fotones

- Puesto que la información de los fenómenos astronómicos nos llega fundamentalmente a través de la luz emitida, resulta esencial tener un modelo confiable de **interacción luz-materia**.

- Así como las estructuras fundamentales de la materia son las **partículas**, los componentes fundamentales de la luz son los **fotones** (ver Choudhuri 2010, Astrophysics for Physicists, cap. 2).

- Los fotones son objetos eminentemente relativistas (se mueven a la velocidad de la luz) y cuánticos ($E = h\nu$, h: cte Planck). Probemos una descripción estadística de fotones a través de su función de distribución.

Los fotones son objetos ultrarelativistas ($v \doteq c$) sin masa

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \xrightarrow[m=0]{} E = pc$$

Además son cuantos de energía

$$E = h\nu \qquad h = 6.626 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg.\,s} : \text{cte. Planck}$$

Sea $d^3r\, d^3p\, f(\underline{r}, \underline{p}, t)$ el # fotones en $d^3r\, d^3p$ a t

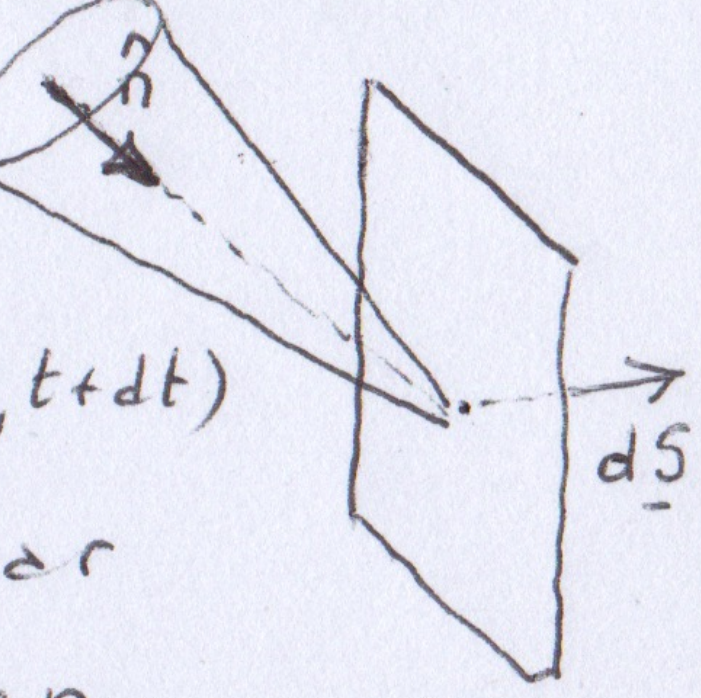
En esféricas en espacio $\underline{p}$:

$$d^3p = dp\, p^2\, d\Omega \qquad d\Omega = d\varphi\, d\theta\, \sin\theta : \text{ángulo sólido}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = pc \\ E = h\nu \end{array}\right\} \longrightarrow p = \frac{h\nu}{c} \longrightarrow dp = \frac{h}{c}\, d\nu$$

$$\therefore d^3p = \left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2\, d\nu\, d\Omega$$

La cantidad que se utiliza en Astronomía para estudiar trasporte de radiación es I_ν, tal que

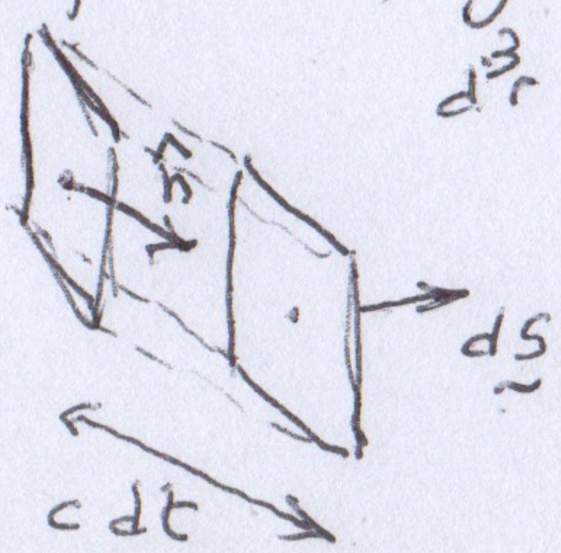


$$I_\nu(\underline{r}, t, \hat{n})\, d\nu\, d\Omega\, \hat{n}\cdot d\underline{S}\, dt$$

Intensidad en $(\nu, \nu+d\nu)$ atravesando $d\underline{S}$ en direcciones $d\Omega$ alrededor de $\hat{n}$ en $(t, t+dt)$

Para relacionar I_ν con f debemos considerar $\frac{I_\nu}{h\nu}$ (# fotones) y considerar el volumen

$$d^3r = c\,dt\, \hat{n}\cdot d\underline{S}$$



$$\therefore \frac{I_\nu}{h\nu}\, d\nu\, d\Omega\, \hat{n}\cdot d\underline{S}\, dt = f \underbrace{\left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2\, d\nu\, d\Omega}_{d^3p}\, \underbrace{c\,dt\, \hat{n}\cdot d\underline{S}}_{d^3r}$$

Ecuación de transporte radiativo

Es decir que $\quad I_\nu = \dfrac{h^4 \nu^3}{c^2} f_\nu$

La ecuación de transporte radiativo para I_ν debe ser entonces la ecuación de Boltzmann para f_ν, es decir

$$\partial_t f_\nu + \underset{\downarrow\ \underline{u} = c\hat{n}}{\underline{u}\cdot\underline{\nabla} f_\nu} + \underset{\underline{F}=0\ \text{(para fotones)}}{\underline{F}\cdot\nabla_{\underline{p}} f_\nu} = \underset{\text{término de colisiones con materia}}{C(f_\nu)}$$

En términos de I_ν:

$$\partial_t I_\nu + \underline{u}\cdot\underline{\nabla} I_\nu = \Gamma_\nu = \Gamma_\nu^+ - \Gamma_\nu^-$$

Los procesos colisionales incluidos en Γ_ν corresponden a absorción (pérdida de fotón), emisión (ganancia de fotón) y scattering (cambio de dirección).

Así por ejemplo:

$$\boxed{\Gamma_\nu^- = \Gamma_{\nu,abs}^- + \Gamma_{\nu,scatt}^- = (k_\nu + \sigma_\nu)\rho I_\nu = K_\nu \rho I_\nu}$$

donde

k_ν : coef. absorción

σ_ν : coef. scattering

ρ : densidad de masa del medio

$K_\nu = k_\nu + \sigma_\nu$: opacidad

Noten que Γ_ν^- es proporcional tanto a I_ν como a ρ.

Así como el scattering remueve fotones de la dirección $\hat{n}$, el proceso inverso permite ganar fotones en $\hat{n}$:

$$\Gamma_{\nu,scatt}^+ = \oint \sigma_\nu \rho I_\nu P(\Omega)\, d\Omega$$

$P(\Omega)$: probabilidad de scattering

Para scattering isótropo es $P(\Omega) = \frac{1}{4\pi}$

$$\boxed{\Gamma_{\nu,scatt}^+ = \sigma_\nu \rho \oint \frac{d\Omega}{4\pi} I_\nu = \sigma_\nu \rho J_\nu}$$

donde $J_\nu = \oint \frac{d\Omega}{4\pi} I_\nu$: intensidad media

Y por último tenemos la emisión de fotones

$$\boxed{\Gamma_{\nu,em}^+ = \rho e_\nu}$$

e_ν : emisividad del medio

Para el caso de equilibrio termodinámico a temp T, los coef. de absorción y emisión se relacionan con la ley de Kirchoff

$$e_\nu = k_\nu B_\nu(T)$$

$B_\nu(T)$: Planck

Ecuación de transporte radiativo

Reemplazando todas estas expresiones de $\Gamma_\nu^\pm$:

$$\partial_t I_\nu + \underline{u}\cdot\underline{\nabla} I_\nu = \rho\left[e_\nu + \sigma_\nu J_\nu - k_\nu I_\nu - \sigma_\nu I_\nu\right]$$

donde $J_\nu = \oint \frac{d\Omega}{4\pi} I_\nu$

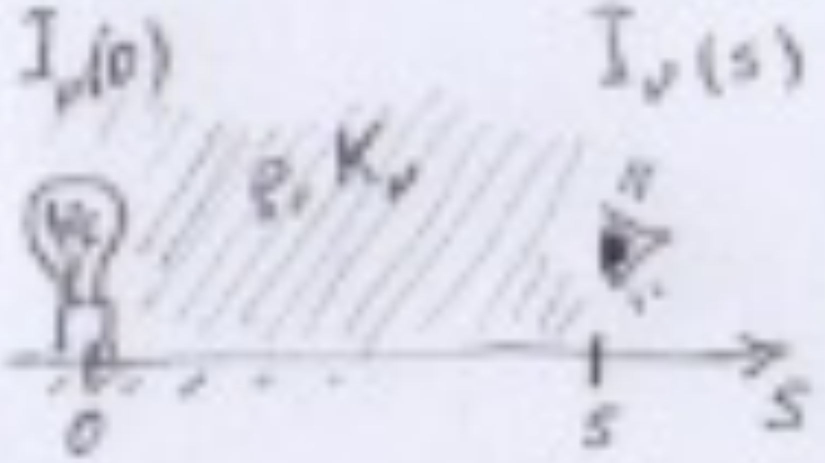
Definimos la función fuente $S_\nu = \frac{e_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu}$

para escribir la ecuación de Tte radiativo

$$\boxed{\partial_t I_\nu + c\,\hat{n}\cdot\underline{\nabla} I_\nu = \rho K_\nu (S_\nu - I_\nu)}$$

Esta ecuación rige el transporte de radiación a través de medios materiales. Su resolución en casos generales es muy complicada. Veamos algunos ejemplos sencillos.

Supongamos el transporte estacionario 1D desde una fuente conocida, a través de un medio sin fuente ($S_\nu = 0$)



$$\partial_s I_\nu = -\frac{\rho K_\nu}{c} I_\nu \longrightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0)\, e^{-\frac{\rho K_\nu s}{c}}$$

El medio es solo absorbente (como niebla), de modo que la intensidad decae con la distancia a la fuente. Definimos el camino libre medio de fotones

$$\lambda_\nu = \frac{c}{\rho K_\nu} \longrightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0)\, e^{-\frac{s}{\lambda_\nu}}$$

Podemos definir también la profundidad óptica del medio como:

$$d\tau_\nu = \frac{\rho K_\nu}{c}\, ds \longrightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu}$$

Si usamos τ_ν como coordenada en el caso general

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{d\tau_\nu}{ds}\frac{\partial}{\partial \tau_\nu} = \frac{\rho K_\nu}{c}\frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \longrightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

Suponiendo S_ν conocida, podemos integrar esta ecuación inhomogenea

$$I = I_{hom} + I_{part} \longrightarrow \frac{dI_{hom}}{d\tau} = -I_{hom} \longrightarrow I_{hom} = A e^{-\tau}$$

$$I_{part} = F(\tau)\, e^{-\tau} \longrightarrow \frac{dI_p}{d\tau} = \frac{dF}{d\tau} e^{-\tau} - \cancel{F e^{-\tau}} = S - \cancel{F e^{-\tau}}$$

$$F = \int_0^\tau dt\, e^t S(t) \longrightarrow I = A e^{-\tau} + \int_0^\tau dt\, S(t)\, e^{-(\tau - t)}$$