# Clase anterior

- Vientos estelares de estrellas tempranas. Formación de perfiles P-Cygni.
- Efecto de presión de radiación.
- Acreción de materia, transformación de energía gravitatoria en calor y radiación.
- Acreción esférica, modelo de Bondi (1952).
- Acreción en sistemas binarios. Lóbulo de Roche.
- Discos de acreción delgados. Difusión de masa e impulso angular.

# Formación estelar: colapso gravitatorio

- Para formar una estrella en el medio interestelar, necesitamos un grumo sobredenso. Entre los fenómenos que conspiran contra el colapso de un grumo hacia su centro, se encuentran su contenido de energía térmica, su impulso angular y su campo magnético.

- Supongamos un grumo con densidad inicial $\rho_0$ y tamaño radial inicial r₀, y por lo tanto con masa $M_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_0$.

- El tamaño radial evolucionará en el tiempo, debido a la autogravedad, como. $\ddot{r} = -\frac{G M_0}{r^2}$

- De esta expresión, podemos obtener un tiempo característico de caída libre para el colapso, dado por $t_{ff} \approx \frac{1}{\sqrt{G \rho_0}}$

- La ecuación de movimiento tiene una primera integral dada por $\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{4\pi}{3} r_0^2 \rho_0 G \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)$

- La segunda integral puede hacerse analiticamente y conduce a un colapso (es decir r—> o) en tiempos del órden de $t_{ff}$.

- Verificar que $t_{colapso} \approx \frac{0.54}{\sqrt{G \rho_0}}$).

# Colapso gravitatorio

- En el caso anterior el grumo puede en principio colapsar a un punto de densidad infinita. Consideremos el efecto de la energía térmica.

- Estudiemos las pequeñas perturbaciones al equilibrio ($\underline{u}_0 = 0$) de un fluido de densidad $\rho_0$ y presión $p_0$, es decir

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{u}_1 = 0 \qquad \rho \simeq \rho_0 + \rho_1 + \cdots$$

$$\partial_t \underline{u}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \underline{\nabla} p_1 - \underline{\nabla} \phi_1$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1$$

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 \qquad c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

- Tomando "$\nabla \cdot$ (ec. mov)" y reemplazando

$$\partial_{tt}^2 \rho_1 = c_s^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi \rho_0 G \rho_1$$

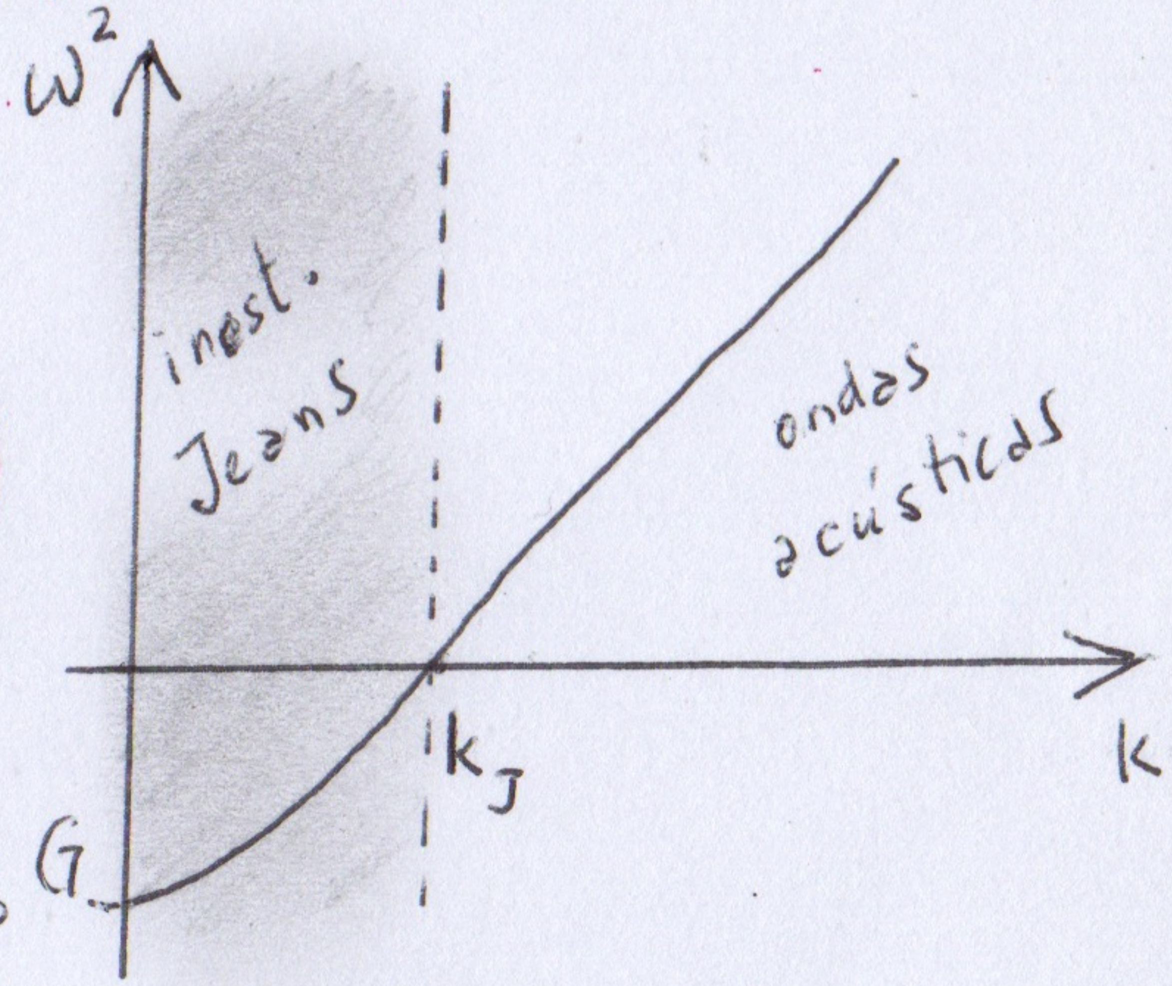
- Obtuvimos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes para la perturbación $\rho_1(\underline{r}, t)$. Suponiendo simetría esférica para el grumo alrededor de su CM:

$$\rho_1 = A e^{i(kr - \omega t)}$$

$$-\omega^2 \rho_1 = -k^2 c_s^2 \rho_1 + 4\pi \rho_0 G \rho_1$$

- Es decir que

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi \rho_0 G$$




$k > k_J \rightarrow \omega^2 > 0$ (ondas)

$k < k_J \rightarrow \omega^2 < 0$ (inestable)

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi \rho_0 G}}{c_s}$$

# Inestabilidad de Jeans

- El cálculo perturbativo anterior muestra que hay dos regímenes:

(i) $k > k_J \longrightarrow$ long. onda corta $\longrightarrow$ propagación de ondas acústicas $\omega^2 \sim c_s^2 k^2 - \cancel{4\pi \rho_0 G}$

(ii) $k < k_J \longrightarrow$ long. onda larga $\longrightarrow$ inestabilidad de Jeans $(\rho_1 \sim e^{\Gamma t})$

$$k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J} = \frac{\sqrt{4\pi \rho_0 G}}{c_s} \longrightarrow \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 G}} \sim c_s t_{ff}$$

- El régimen (i) simplemente las perturbaciones de long. onda corta $(\lambda < \lambda_J)$ se propagan como ondas a la velocidad

$$c = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 - \frac{k_J^2}{k^2}} \xrightarrow[k \to \infty]{} c_s$$

- En el régimen (ii) las perturbaciones de densidad $(\cdot \rho_1)$ crecen como $\rho_1 \sim e^{\Gamma t}$, $\Gamma = c_s \sqrt{k_J^2 - k^2}$

- Este comportamiento, conocido como <u>inestabilidad de Jeans</u>, consiste en el colapso de grumos de densidad $\rho_0 + \rho_1(t)$ y tamaño inicial $\lambda_J/2$.

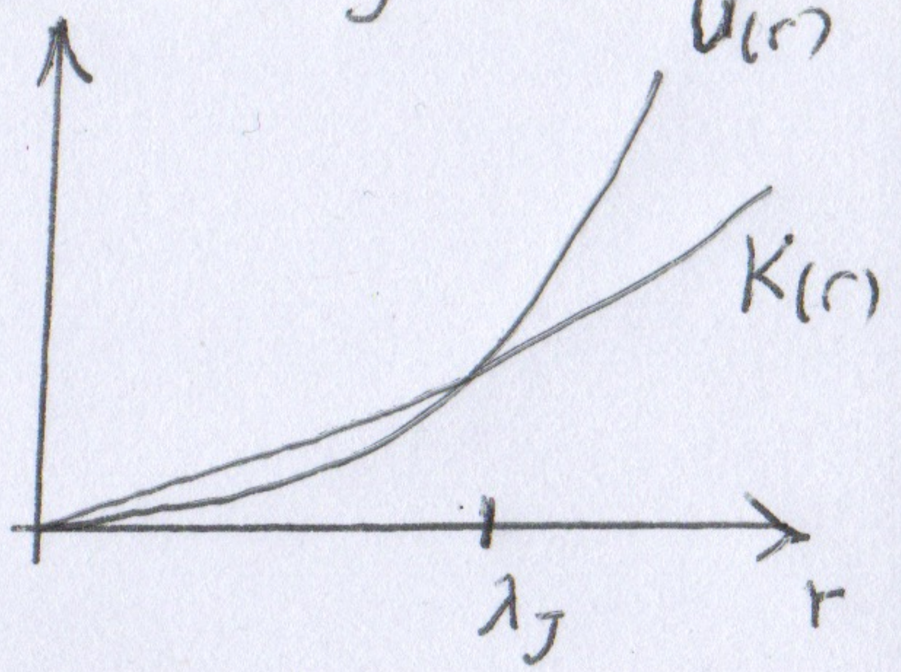
$$R_J = \frac{\lambda_J}{2} = \frac{c_s}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 G}} \quad : \text{radio de Jeans}$$

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_J^3 = \frac{c_s^3}{6} \sqrt{\frac{\pi^5}{\rho_0 G^3}} \quad : \text{masa de Jeans}$$

- Comparemos energías gravitatoria y térmica de grumos de tamaño $r$

$$U(r) \sim \frac{G M^2(r)}{r} \sim G \rho_0^2 r^5$$

$$K(r) \sim \frac{3}{2} \rho_0 r^3 \sim c_s^2 \rho_0 r^3$$




- Para que el grumo colapse, debe ser $U(r) > K(r)$

Eso ocurre para $r \sim \frac{c_s}{\sqrt{G\rho_0}} \sim \lambda_J$

# Ciclos PP y CNO

- Las estrellas de **secuencia principal** (o “normales”) son esferas autogravitantes de gas en equilibrio hidrostático. La atracción gravitatoria hacia el centro es equilibrada por el gradiente de presión.
- En el núcleo los procesos de fusión (transformación de H en He por protón-protón o CNO) transforman energía nuclear en calor, y esa energía se transporta radialmente por radiación (o también por convección) hacia la superficie.

- El ciclo protón-protón libera en forma de calor el 0.7% de la energía nuclear disponible:

$$M_{sol} = 2.10^{33}\ g \qquad L_{sol} = 3.8.10^{33}\ \frac{erg}{s}$$

$$T_{sol} \sim \frac{0.007 M_{sol} c^2}{L_{sol}} \sim 10^{11} \text{ años}$$

$$(T_{univ} \sim 1.37 \times 10^{10} \text{ años})$$

CICLO PROTÓN-PROTÓN (Choudhuri 2010, pp 98-99)

$$\left.\begin{array}{l} ^1H + {}^1H \longrightarrow {}^2H + e^+ + \nu \\ ^2H + {}^1H \longrightarrow {}^3He + \gamma \end{array}\right\} \text{2 veces}$$

$$^3He + {}^3He \longrightarrow {}^4He + {}^1H + {}^1H$$

$^1H$: protón

$^2H$: deuterio

$e^+$: positrón

$\nu$: neutrino

- Cada ciclo produce 26.2 MeV en $\gamma$ y $e^+$ y 0.26 MeV en $\nu$.
- Usa 6 $^1H$ y sobran 2 $^1H$. El rendimiento en calor es entonces 26.2 MeV/4×938 MeV ~ 0.007

- El rendimiento de los ciclos P-P y CNO están dados por

$$\varepsilon_{PP} = 2.4\ 10^3 \rho X^2 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} \exp\left[-33.8\left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}\right] \frac{erg}{g.s}$$

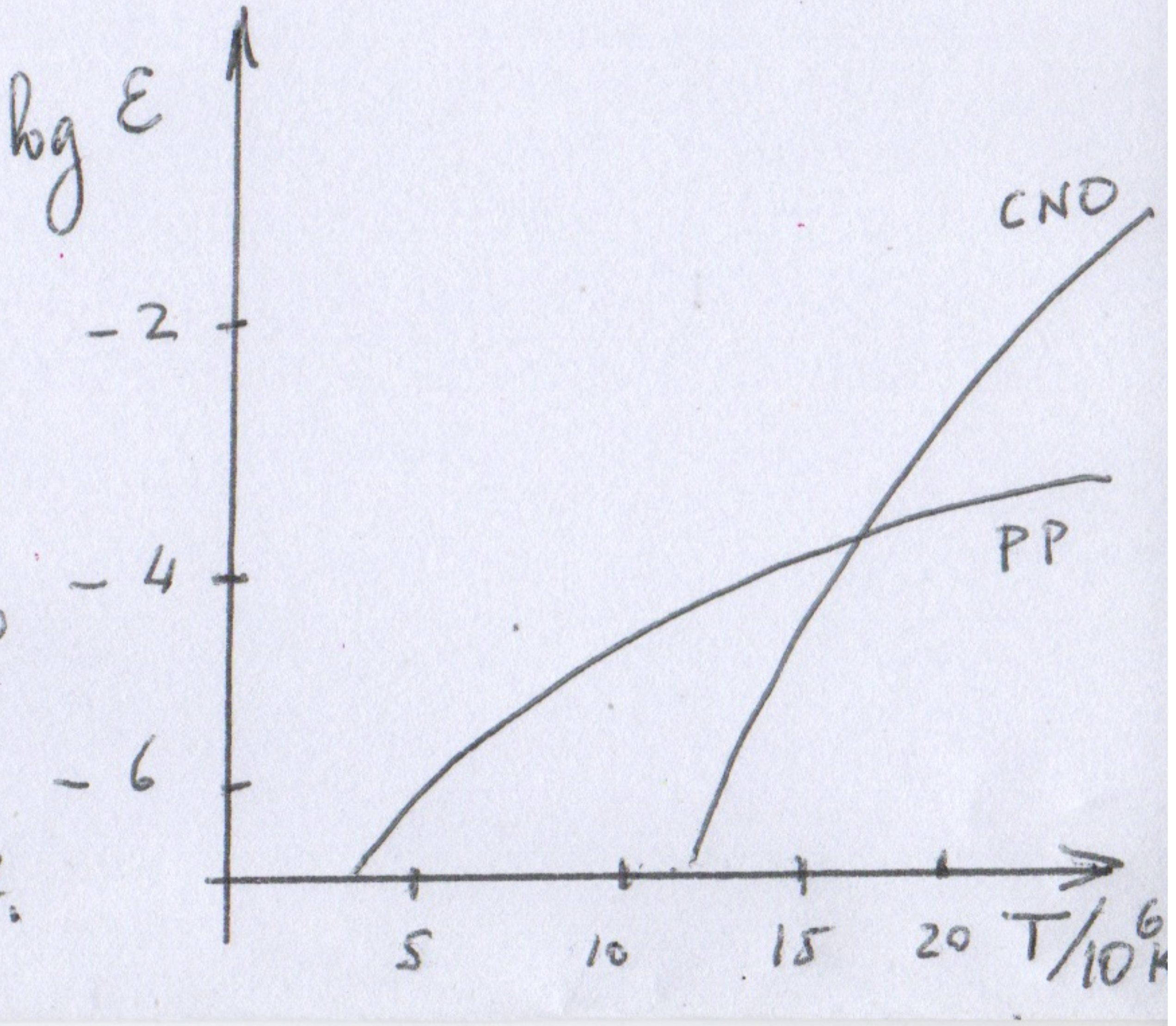
$$\varepsilon_{CNO} = 8.7 \times 10^{24} \rho X_{CNO} X \left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} \exp\left[-152.3\left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}\right] \frac{erg}{g.s}$$

$X$: fracción de masa de H

$X_{CNO}$: suma de fracciones de masa de C+N+O

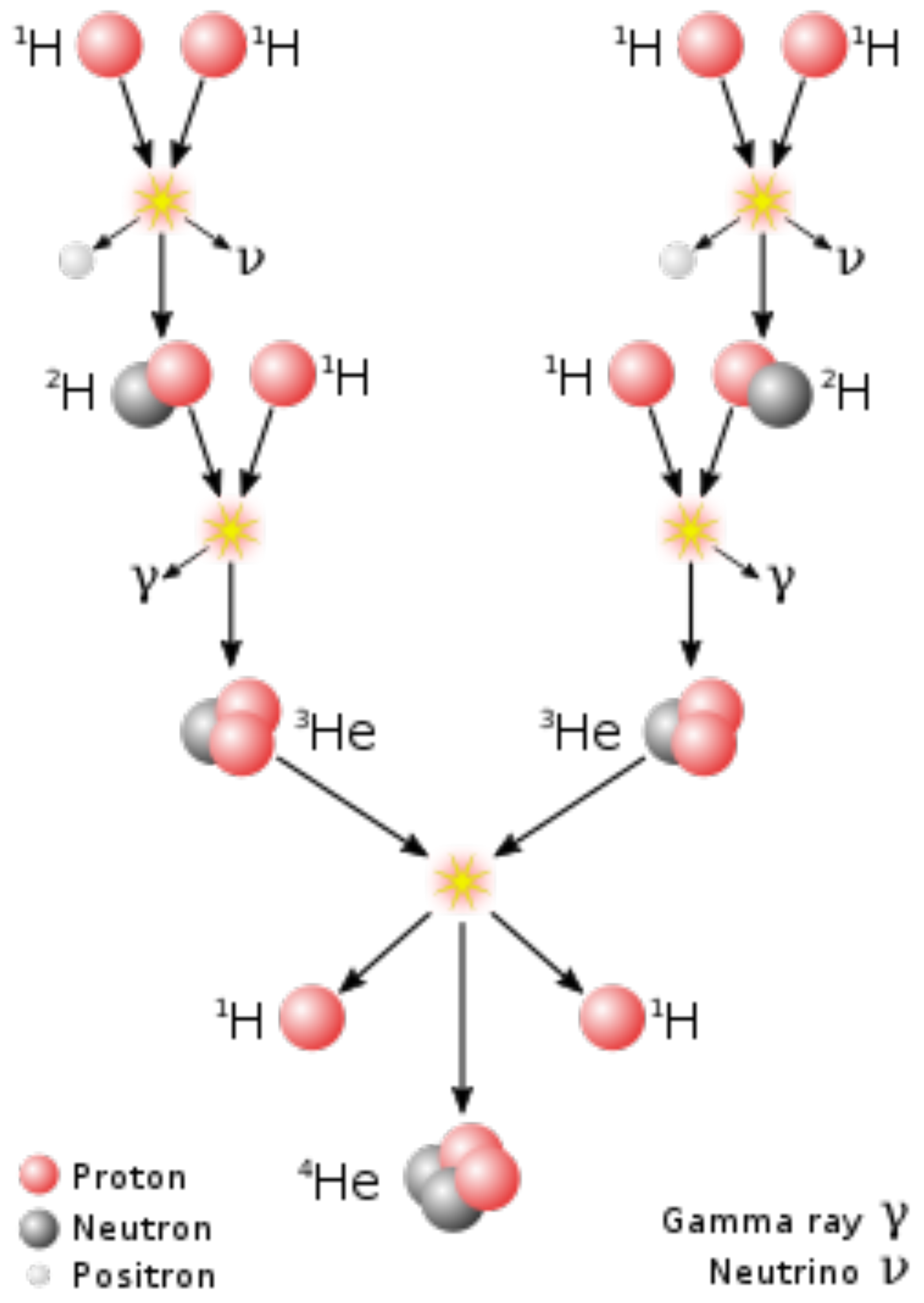
Hay otros procesos de fusión (14 He → Fe por ejemplo), pero son menos eficientes.

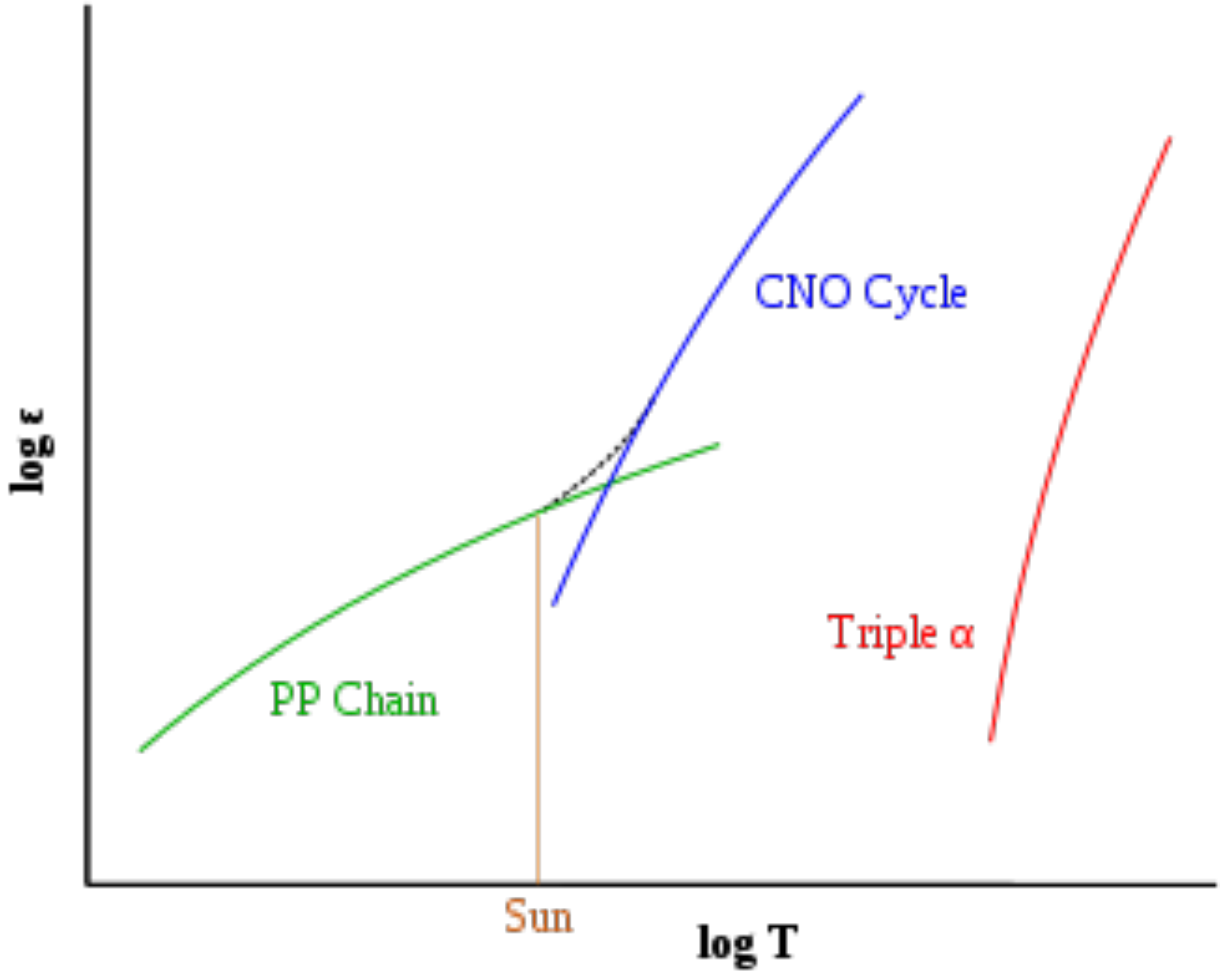
Ver también Harwit 2006, p 342.



# Ciclos PP y CNO

- Las estrellas de **secuencia principal** (o "normales") son esferas autogravitantes de gas en equilibrio hidrostático. La atracción gravitatoria hacia el centro es equilibrada por el gradiente de presión.
- En el núcleo los procesos de fusión (transformación de H en He por protón-protón o CNO) transforman energía nuclear en calor, y esa energía se transporta radialmente por radiación (o también por convección) hacia la superficie.



# Interiores estelares

- Las ecuaciones que describen el equilibrio de los interiores estelares son las siguientes:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{G M(r)}{r^2} = 0 \qquad M(r) = 4\pi \int_0^r dr\, r^2 \rho(r)$$

- El balance de energía:

$$\frac{3}{2} n k_B \cancel{\frac{dT}{dt}} = -p \cancel{\nabla \cdot \underline{u}} - \nabla \cdot \underline{q} + \rho \epsilon$$

$\partial_t = 0$ $\quad \underline{u} = 0$

$\epsilon$ : producción de energía nuclear

$[\epsilon] = \frac{E}{M.T}$

En esféricos $\nabla \cdot \underline{q} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 q(r)\right)$

- Integrando la ecuación en una esfera de radio r:

$$L(r) = 4\pi r^2 q(r) = 4\pi \int_0^r dr\, r^2 \rho \epsilon \qquad [L] = \frac{E}{T}$$

- $L(r)$ es la $\frac{\text{energía}}{\text{tiempo}}$ que cruza una superficie esférica de radio genérico r.

En estado estacionario, es igual a la energía nuclear liberada en su interior.

- Suponemos que el flujo radial de energía $\underline{q}(r)$ ocurre por radiación. En aproximación de difusión ($I_\nu \simeq B_\nu - \frac{1}{\rho K_\nu}\underline{u}\cdot\nabla B_\nu$) y atmósfera gris ($K_\nu = K_{Ross}$)

$$q(r) = -\frac{16\sigma}{3\rho c K_{Ross}} T^3 \frac{dT}{dr}$$

$\sigma \simeq 5.67 . 10^{-5} \frac{erg}{cm^2 . K^4 . s}$ (cte. Stefan-Boltzmann)

- Por último, para estrellas normales suponemos que el gas es ideal

$$p = \rho \frac{k_B T}{m}$$

Sigue siendo una buena aproximación, aun para las densidades de nucleos estelares

$\rho_0 \sim 150 \frac{g}{cm^3}$ , $\quad n \sim 10^{26} cm^{-3}$

# Leyes de escala

- Las ecuaciones anteriores describen el equilibrio hidrostático de interiores estelares y proveen los perfiles $p(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$, $q(r)$ conocidos $m$, $K_{Ross}$ y $\epsilon(\rho, T)$.

- Veamos que sin resolver las ecuaciones, podemos obtener leyes de escala para una estrella de masa $M$ y radio $R$

$$M = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho \longrightarrow M \sim \rho R^3$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{GM(r)}{r^2} = 0 \longrightarrow p = \frac{\rho k_B T}{m} \sim \rho \frac{GM}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= 4\pi r^2 q(r) \\ q &= -\frac{16\sigma}{3\rho c K_R} T^3 \frac{dT}{dr} \end{aligned}\right\} \longrightarrow L \sim q R^2 \sim \frac{\sigma T^4 R}{\rho c K_R}$$

- Notemos que $k_B T \sim \frac{GmM}{R}$. Es decir que al colapsar $R$ disminuye y $T$ aumenta.

- $\epsilon(T)$ es una función que crece fuertemente con $T$. Esto hace que la fusión sea significativa solo a partir de una temperatura umbral $T_*$ ($T_* \sim 2.10^7$ K)

- Una vez alcanzada $T_*$, el colapso alcanza un equilibrio, como una olla cuya presión mantiene la tapa levantada.

- Entonces

$$k_B T_* \sim \frac{GmM}{R} \longrightarrow R \sim \frac{Gm}{k_B T_*} M$$

Las estrellas mas masivas son mas grandes

$$M \sim \rho R^3 \longrightarrow \rho \sim \left(\frac{k_B T_*}{Gm}\right)^3 \frac{1}{M^2}$$

Las mas masivas son menos densas

$$L \sim \frac{\sigma T^4 R}{\rho c K_R} \xrightarrow[\rho \sim M^{-2} \quad R \sim M]{} L \sim M^3$$

- Si en vez de la opacidad de Rosseland usamos la de Kramers $K_{Kr} \sim K_0 \rho T^{-7/2}$

$$L \sim \frac{R}{\rho^2} \longrightarrow L \sim M^5$$

Relaciones masa-luminosidad