Clase anterior

- Evolución estelar. Estrellas de baja masa ($M \leq 8\ M_{sol}$) y de alta masa.

- Enanas blancas.

- Gas de Fermi. Degeneración de electrones. Longitud de *de Broglie*.

- Función de distribución de Fermi-Dirac. Cálculo de densidad, energía interna y presión.

- Caso no relativista: $p \propto \rho^{5/3}$

Enanas blancas ultra-relativistas

- Hasta ahora hemos considerado efectos cuánticos de los electrones (fermiones), pero no los efectos relativistas.

- Hemos supuesto $E = \frac{p^2}{2m}$. Pero si los electrones tuvieran $v_e \sim c$, entonces

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$d^3p = 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi}{c^3}\sqrt{E^2 - m_e^2c^4}\, E\, dE = \begin{cases} 4\pi m_e \sqrt{2 m_e E}\, dE & (\text{si } p/m_e \ll c) \text{ clásico} \\ \frac{4\pi}{c^3} E^2 dE & (\text{si } p/m_e \gg c) \text{ ultra-relat} \end{cases}$$

- En el límite ultra-relativista

$$n_e = \frac{8\pi}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{dE\; E^2}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1} \simeq \frac{8\pi}{c^3h^3}\int_0^{E_F} dE . E^2 = \frac{8\pi}{c^3h^3}\frac{E_F^3}{3}$$

$$U = \frac{8\pi}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{dE . E^3}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1} \simeq \frac{8\pi}{c^3h^3}\frac{E_F^4}{4}$$

- Para la presión, debemos volver a integrar por partes:

$$p_e = \frac{8\pi}{c^3h^3} kT \int_0^\infty dE\, E^2 \ln\left(1 + e^{\frac{E_F - E}{kT}}\right) = \frac{U}{3}$$

integrando por partes

- La ecuación de estado para un gas de Fermi ultra-relativista resulta

$$p_e \simeq \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

Corresponde a Lane-Emden con $n=3$

Revisemos las leyes de escala para equilibrios politrópicos

$$\left.\begin{aligned} M(r) &= 4\pi\int_0^r dr\, r^2 \rho \\ \frac{dp}{dr} &= -\rho\frac{GM(r)}{r^2} \\ p &\simeq C . \rho^a \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} R &\sim M^{\frac{a-2}{3a-4}} \\ \rho &\sim M^{\frac{2}{3a-4}} \end{aligned}$$

$a = 1 \rightarrow T = T_*$ (sec. ppal) $\rightarrow \begin{cases} R \sim M \\ \rho \sim M^{-2} \end{cases}$

$a = 5/3 \rightarrow$ enanas blancas no relat. $\rightarrow \begin{cases} R \sim M^{-1/3} \\ \rho \sim M^2 \end{cases}$ ¡Muy diferentes!

$a = 4/3 \rightarrow$ enanas blancas ultra-relat $\rightarrow M = cte$ ¿?

Masa de Chandrasekhar

- La llamada **masa de Chandrasekhar** es un límite superior para las enanas blancas, superado el cual la presión de electrones no logra balancear a la gravedad.
- Fue obtenida por Subrahmanyan Chandrasekhar en 1931, quien muchos años despues obtuvo el premio Nobel por sus estudios de interiores estelares.

- Sean N electrones y protones libres ($N_e = N_p$) formando una estrella de radio R_*. Cada electrón tiene un "tamaño" Λ. Entonces

$$N\Lambda^3 \simeq R_*^3$$

- El impulso de cada fermión es

$$p_F \sim \frac{h}{\Lambda} \sim \frac{h N^{1/3}}{R_*}$$

- La energía en el límite ultra-relativista es

$$E_F = p_F c \sim \frac{hc}{R_*} N^{1/3}$$

y la energía cinética total: $N E_F \sim \frac{hc}{R_*} N^{4/3}$

- La energía gravitatoria es aportada por los protones

$$E_G = -\frac{G(m_p N)^2}{R_*}$$

- En equilibrio obtenemos el valor crítico

$$hc\, N_{ch}^{4/3} \sim G m_p^2 N_{ch}^2 \longrightarrow N_{ch} \sim \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^3}$$

- La masa de Chandrasekhar es simplemente

$$M_{ch} \simeq m_p N_{ch} \sim \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2}$$

$M_{Planck} = \sqrt{\frac{hc}{G}}$

- Una estimación adecuada de $M_{ch} \sim 1.4 M_{sol}$
- Para $N > N_{ch}$ es $E_G > NE_F \longrightarrow$ colapso

Estrellas de neutrones y agujeros negros

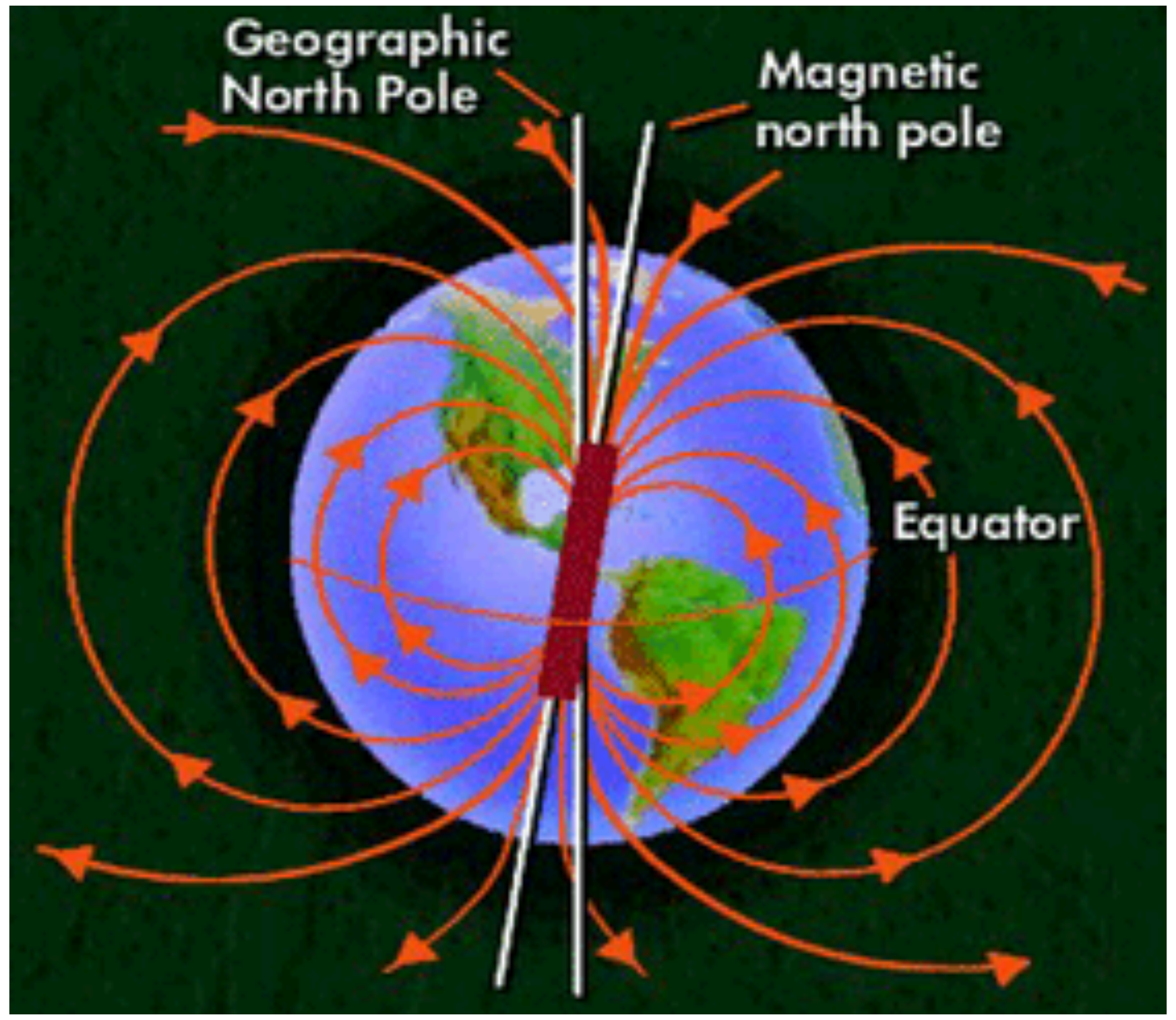
- Si una estrella que agotó su combustible nuclear tiene $M < M_{Ch} \approx 1.46\ M_{sol}$, se transformará en **enana blanca**.
- Pueden probar obtener la masa de Chandrasekhar resolviendo Lane-Emden para n = 3
- Si $M > M_{Ch}$, entonces la presión de Fermi de electrones será insuficiente y continuará colapsando.
- Si $M \approx 2 - 3\ M_{sol}$ —-> estrella de neutrones
- Si $M \geq 2 - 3\ M_{sol}$ —-> agujero negro
- En las **estrellas de neutrones**, las densidades son mucho mas altas que para enanas blancas. Los neutrones no sobreviven en estado libre porque decaen en: $n \rightarrow p + e + \hat{\nu}$. Pero a altas densidades, se favorece el proceso inverso: $p + e \rightarrow n + \nu$. Los neutrones se comportan tambien como un gas de Fermi con longitud de *de Broglie* mucho mas compacta.
- Para evaluar si necesitamos (o no) recurrir a **Relatividad General**, pensemos por ejemplo en la velocidad de escape de un objeto de masa M y radio R es $v_{esc}^2 = 2GM/R$. Es decir que se requieren velocidades mayores para escapar de objetos de mayor M o de menor R. Si se necesita alcanzar a velocidades $v_{esc} \approx c$ para poder escapar, entonces debemos considerar Relatividad General.
- En síntesis, debemos recurrir a Relatividad General si

$$f = \frac{2GM}{c^2R} \approx 1$$

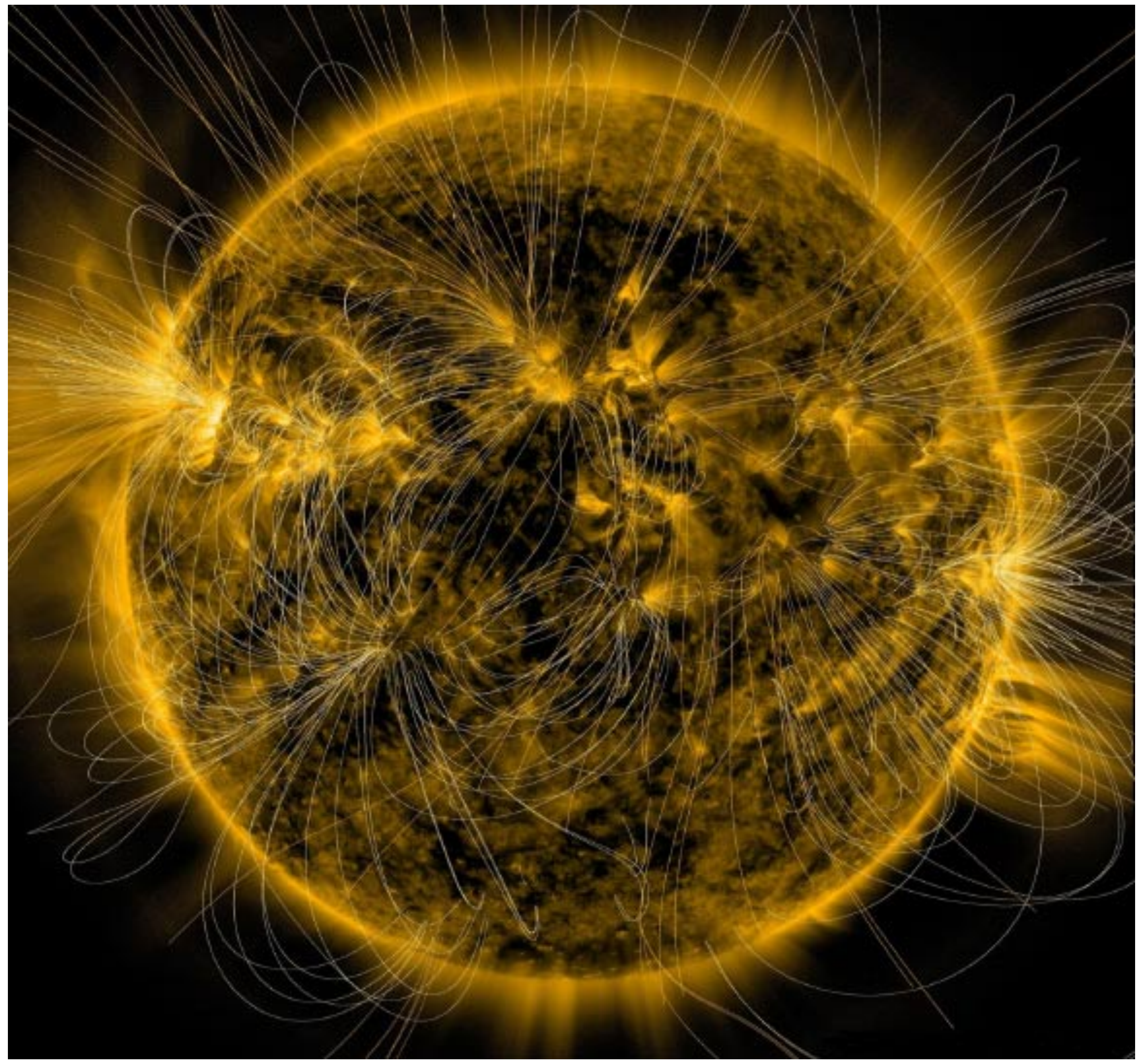
- Por lo general $f \ll 1$. Para la masa y radio del Sol, por ejemplo es $f_{sol} \approx 5\ 10^{-6}$. Para una estrella de neutrones, con $M \approx 2M_{sol}$ y un radio de 10 km, es $f_{neu} \approx 0.6$, es decir, que los efectos de Relatividad General empiezan a importar.

Campos magnéticos en Astrofísica

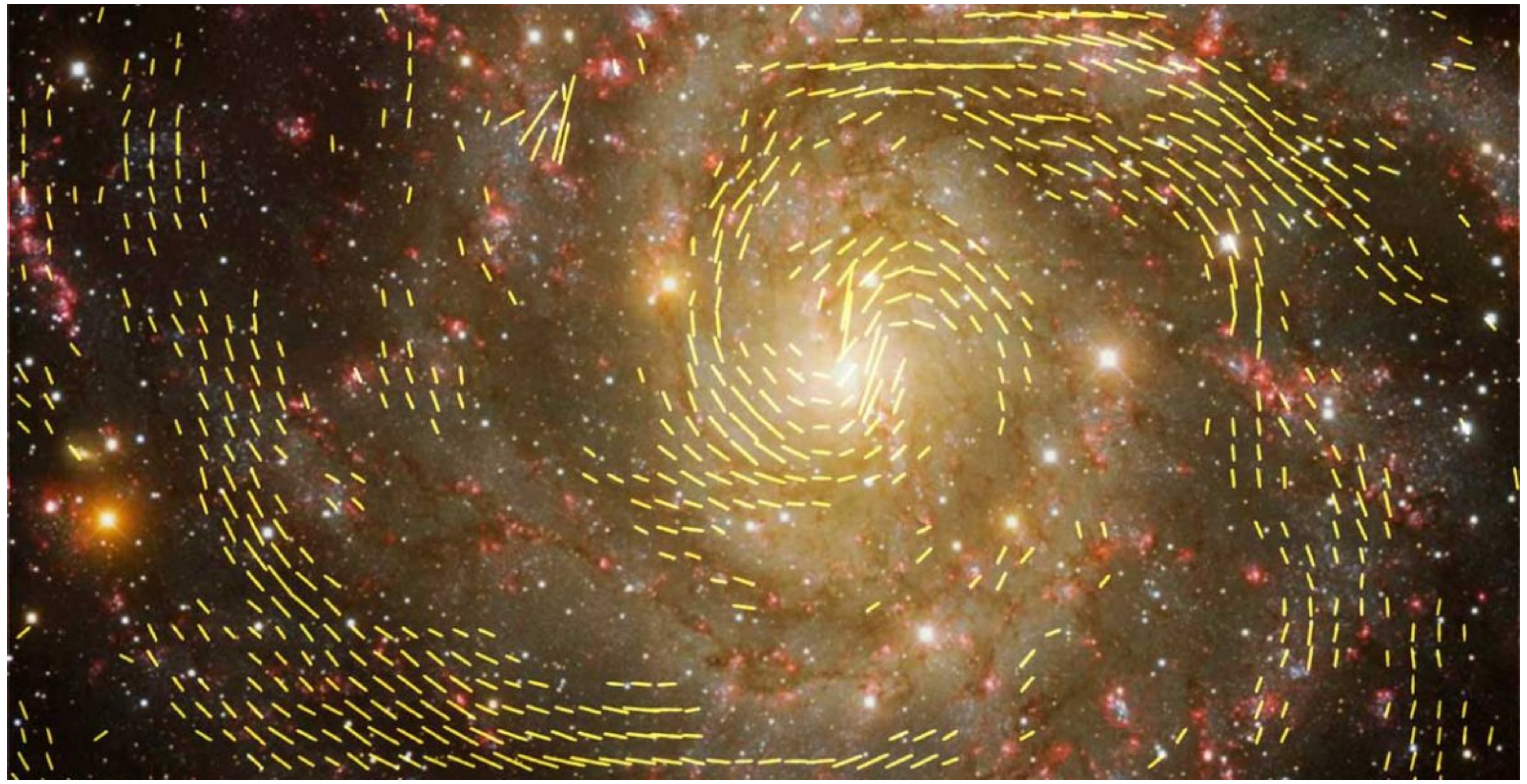
- Hasta ahora nos ocupamos de la interacción de **materia** con **radiación** por un lado y con el **campo gravitatorio** por el otro.
- Pero el hidrógeno, a temperaturas por encima de 8000 K es un gas electricamente cargado, es decir un **plasma**, y por lo tanto interactúa tambien con campos eléctrico y magnético.
- Tenemos campos magnéticos asociados con virtualmente todos los objetos astrofísicos:



En la Tierra y en la mayoría de los **planetas** del sistema solar



En el Sol y en **estrellas** de todos los tipos espectrales.



En la vía Lactea y en todas las **galaxias**.

Dinámica de fluidos cargados

- Necesitamos ecuaciones para la dinámica de **plasmas**. En el caso mas simple, supongamos hidrógeno totalmente ionizado.
- Podemos pensar en una descripción de dos fluidos: **electrones** de masa m_e y carga -e y **protones** de masa m_p y carga +e.

$$\partial_t (m_s n_s) + \underline{\nabla} \cdot (m_s n_s \underset{\sim}{u}_s) = 0 \qquad s = e, p$$

$$m_s n_s \left[\partial_t \underset{\sim}{u}_s + (\underline{u}_s \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}_s \right] = q_s n_s \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u}_s \times \underline{B} \right) - \underline{\nabla} p_s \pm \underline{R}$$

- La primera es la ec. continuidad para c/especie.
- La segunda es la ec. movimiento por unidad de volúmen, con fuerzas eléctrica y magnética. $\underline{R}$ es la fuerza de fricción (colisional) entre especies.
- Esta fuerza es proporcional a la frecuencia colisional ν_{ep} y para los electrones vale

$$\underline{R} = - m_e n_e \nu_{ep} (\underline{u}_e - \underline{u}_p)$$

NOTA: $m_e n_e \nu_{ep} = m_p n_p \nu_{pe}$

- Ese gas de dos especies tiene densidad de carga

$$\rho_c = e(n_p - n_e) \approx 0 \longrightarrow n_e = n_p$$

porque los electrones se mueven inmediatamente para neutralizar.

- Tambien conlleva una densidad de corriente

$$\underset{\sim}{j} = \sum_s q_s n_s \underset{\sim}{u}_s \longrightarrow \underset{\sim}{j} = en(\underline{u}_p - \underline{u}_e)$$

- Noten que entonces $\underline{R}$ puede escribirse en términos de $\underset{\sim}{j}$:

$$\underline{R} = \frac{m_e \nu_{ep}}{e} \underset{\sim}{j} = \frac{en}{\sigma} \underset{\sim}{j}$$

donde σ es la conductividad eléctrica de un plasma.

Descripción Magnetohidrodinámica (MHD)

- Suponiendo $m_e \ll m_p$, este fluido de dos especies tiene

$$\rho = m_p n_p + \cancel{m_e n_e} \simeq m_p n$$

$$\underline{u} = \frac{m_p n_p \underline{u}_p + \cancel{m_e n_e \underline{u}_e}}{m_p n_p + \cancel{m_e n_e}} \simeq \underline{u}_p$$

$$p = p_p + p_e$$

- La ecuación de continuidad resulta

$$\boxed{\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0}$$

- Si sumamos las ecs. movimiento:

$$\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = en\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{u}_p \times \underline{B}\right) - \underline{\nabla} p_p - \underline{R}$$

$$0 = -en\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{u}_e \times \underline{B}\right) - \underline{\nabla} p_e + \underline{R}$$

$$\boxed{\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = \frac{1}{c}\underline{j} \times \underline{B} - \underline{\nabla} p}$$

- Noten que la fuerza eléctrica sobre el fluido es nula (pero $\underline{E} \neq 0$) y la fuerza de fricción también

- Sumando las ecs. obtuvimos la ec. movimiento del fluido. Pero nos falta otra ecuación.

- De la ecuación para los electrones, podemos despejar el campo $\underline{E}$:

$$\underline{E} = -\frac{1}{c}\left(\underline{u} - \frac{\underline{j}}{en}\right) \times \underline{B} - \frac{1}{en}\underline{\nabla} p_e + \frac{1}{\sigma}\underline{j}$$

- Esta ecuación es la llamada <u>ley de Ohm generalizada</u>. Hemos utilizado

$$\underline{j} = en(\underline{u} - \underline{u}_e) \longrightarrow \underline{u}_e = \underline{u} - \frac{1}{en}\underline{j}$$

- Para densidades no demasiado bajas, podemos despreciar los términos "$\frac{1}{en}$" y obtener

$$\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{u} \times \underline{B} \simeq \frac{1}{\sigma}\underline{j} \qquad \text{Ley de Ohm}$$

- Si tenemos en cuenta que $\underline{E}^* = \underline{E} + \frac{1}{c}\underline{u} \times \underline{B}$ es el campo en el referencial del fluido, tenemos la ley de Ohm de cualquier medio conductor

Descripción Magnetohidrodinámica (MHD)

- Los campos $\underset{\sim}{E}$ y $\underset{\sim}{B}$ no son en general campos externos conocidos, sino campos autoconsistentes. Nos falta entonces una ecuación para $\underset{\sim}{B}$.

- Tomamos el "$\underline{\nabla}\times$" de la ley de Ohm y recurrimos a las ecs. Maxwell:

$$\underline{\nabla}\times\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\underline{u}\times\underline{B}\right)=\frac{1}{\sigma}\underline{\nabla}\times\underline{J}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\nabla}\times\underline{E}=-\frac{1}{c}\partial_t\underline{B}\\ \underline{J}=\frac{c}{4\pi}\underline{\nabla}\times\underline{B}\end{array}\right\}\longrightarrow -\frac{1}{c}\partial_t\underset{\sim}{B}+\frac{1}{c}\underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B})=\frac{c}{4\pi\sigma}\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B})$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B}=0\rightarrow\boxed{\partial_t\underline{B}=\underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B})+\eta\,\nabla^2\underline{B}}$$

Ec. inducción

donde $\eta=\frac{c^2}{4\pi\sigma}$: resistividad

- Con la <u>ec. inducción</u> completamos entonces el sistema de <u>ecuaciones MHD</u>.

Ecs. MHD
$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho+\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})=0\\ \partial_t\underline{u}=-(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}-\frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p+\frac{1}{4\pi\rho}(\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}\\ \partial_t\underline{B}=\underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B})+\eta\,\nabla^2\underline{B}\\ E+\frac{1}{c}\underline{u}\times\underline{B}=\frac{1}{\sigma}\underset{\sim}{J}\end{array}\right.$$

Para comparar la importancia relativa de los términos del lado derecho de la ec. inducción, definimos el <u>número de Reynolds magnético</u>

$$R_m=\frac{\|\nabla\times(\underline{u}\times\underline{B})\|}{\eta\,\|\nabla^2\underline{B}\|}\sim\frac{u_0B_0/L_0}{\eta\,B_0/L_0^2}\sim\frac{u_0L_0}{\eta}$$

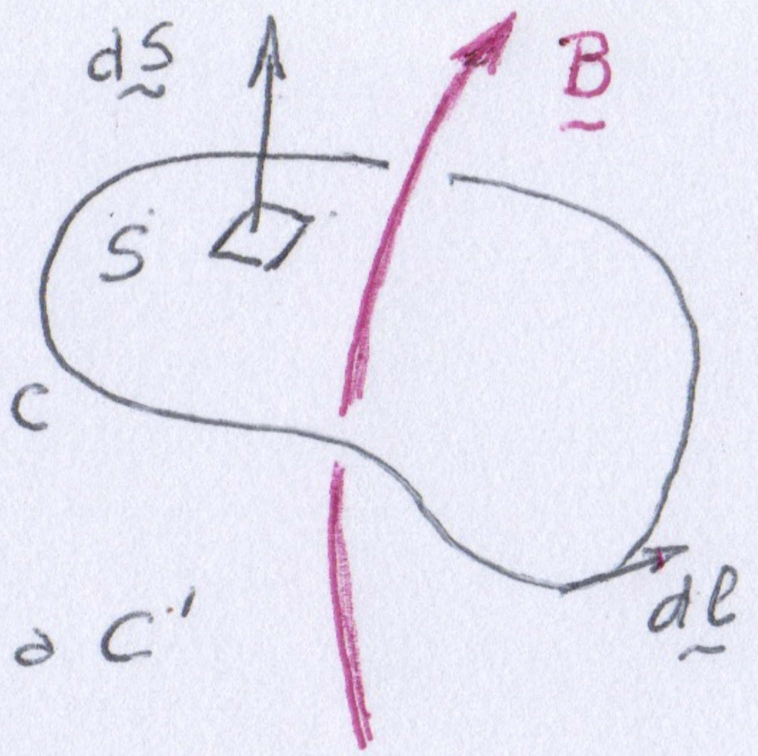
$$R_m=\frac{u_0L_0}{\eta}\ll 1\longrightarrow\partial_t\underset{\sim}{B}\sim\eta\,\nabla^2\underline{B}\rightarrow\text{difusión de }\underset{\sim}{B}$$

$$R_m=\frac{u_0L_0}{\eta}\gg 1\longrightarrow\partial_t\underset{\sim}{B}\sim\underline{\nabla}\times(\underline{u}\times\underline{B})\rightarrow\text{congelamiento campo-materia}$$

Congelamiento campo-materia

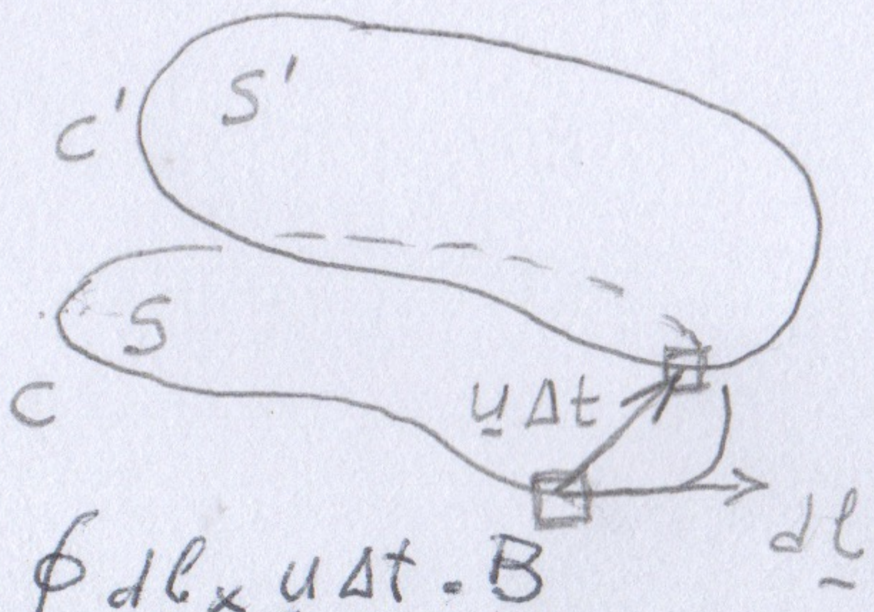
- Mostraremos que la ecuación $\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B})$ implica que las líneas de $\underline{B}$ son advectadas.
- Sea C una curva cerrada que se mueve con el plasma

El flujo de $\underline{B}$ a través de S en t es:



$$\Phi(S,t) = \iint_S d\underline{S} \cdot \underline{B}$$

- Entre t y Δt, C evoluciona a C' y S a S'. Como $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$, el flujo en una superficie cerrada es:



$$0 = \oint d\underline{S} \cdot \underline{B} = -\iint_S d\underline{S} \cdot \underline{B} + \iint_{S'} d\underline{S} \cdot \underline{B} + \oint_C d\underline{l} \times \underline{u} \Delta t \cdot \underline{B}$$

- El flujo de $\underline{B}$ en S' a $t+\Delta t$ es

$$\Phi(S', t+\Delta t) = \iint_{S'} d\underline{S} \cdot [\underline{B} + \Delta t \, \partial_t \underline{B}] \approx \iint_{S'} d\underline{S} \cdot \underline{B} + \Delta t \iint_S d\underline{S} \cdot \partial_t \underline{B}$$

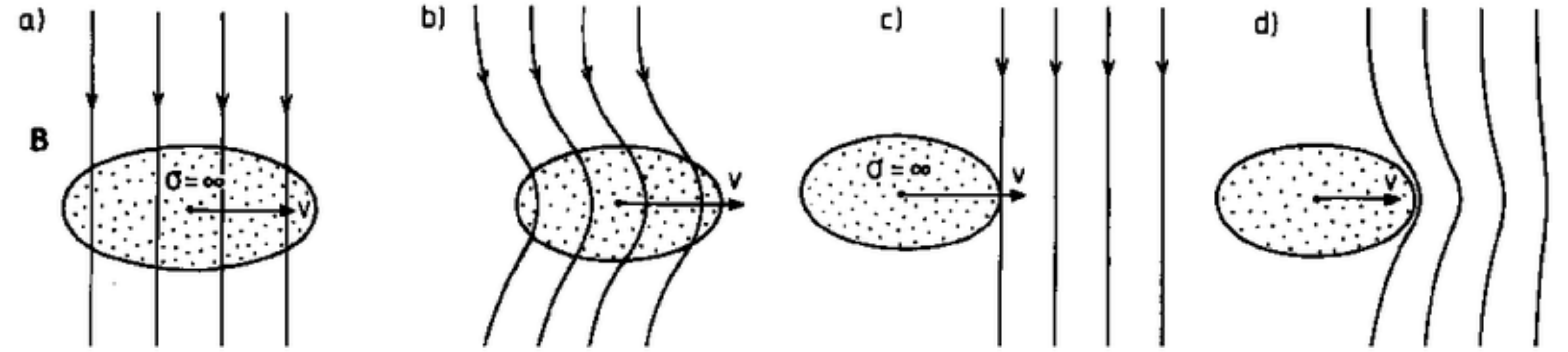
- Entonces:

$$\Phi(S', t+\Delta t) - \Phi(S,t) = \underbrace{\iint_{S'} d\underline{S} \cdot \underline{B} - \iint_S d\underline{S} \cdot \underline{B}}_{-\Delta t \oint_C d\underline{l} \times \underline{u} \cdot \underline{B} \text{ (ver ec. ant.)}} + \Delta t \iint_S d\underline{S} \cdot \partial_t \underline{B}$$

- Usando el teorema de Stokes:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi(S', t+\Delta t) - \Phi(S,t)}{\Delta t} = \iint_S d\underline{S} \cdot [\partial_t \underline{B} - \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B})] = 0 \quad \forall S$$

- Es decir que para $R_m \to \infty$, se conserva el flujo magnético que atraviesa cualquier curva cerrada que se mueva con el plasma.



- El congelamiento implica que los elementos de fluido arrastran en su movimiento a las lineas de $\underline{B}$ que los atraviesan.
- Inversamente, las lineas de $\underline{B}$ arrastran a los elementos de fluido enhebrados a ellas.