

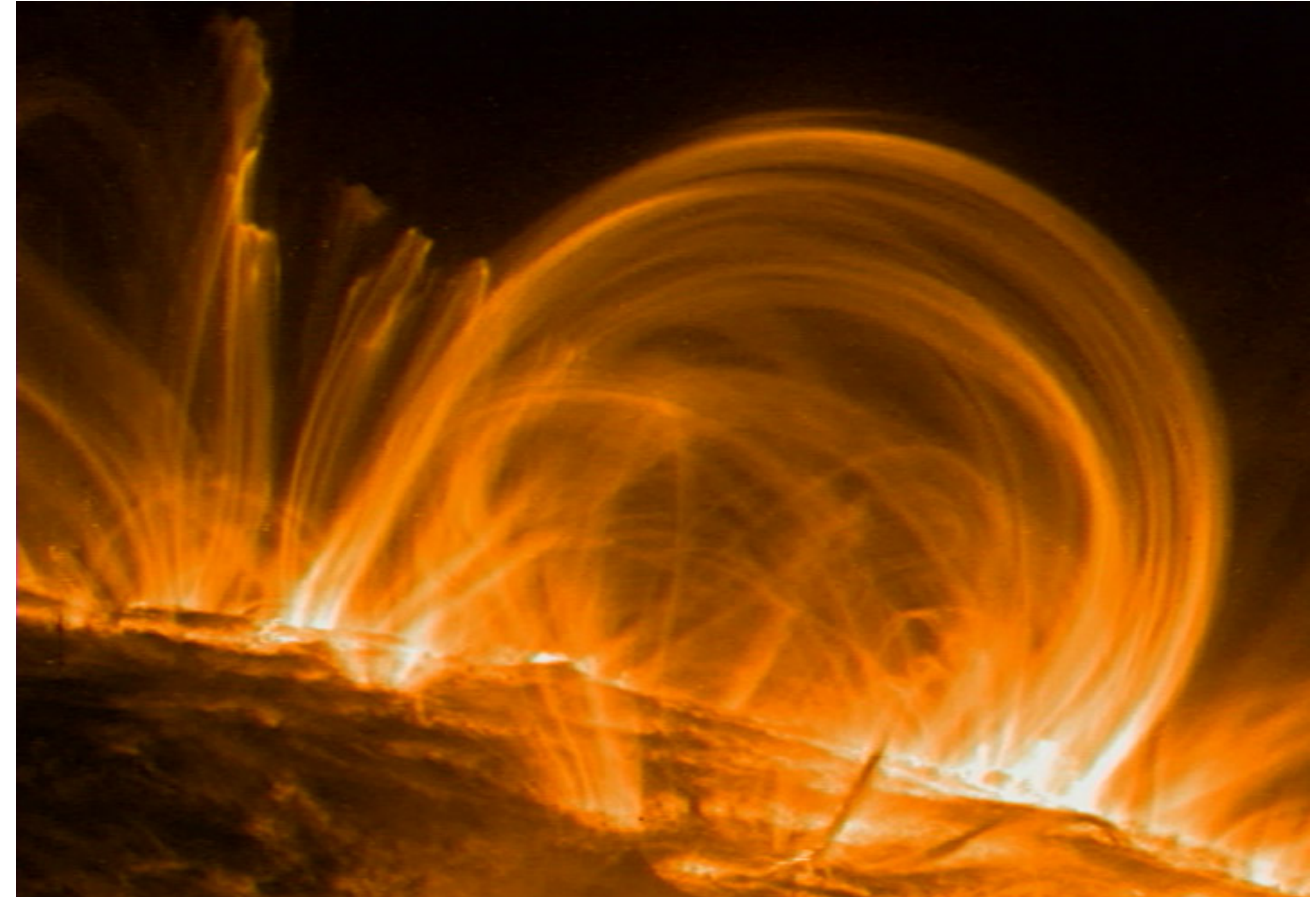
# Ecuación de inducción

- La ecuación de inducción es una de las ecuaciones MHD, que rige la dinámica del campo magnético:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

- Para  $Rm \gg 1$   $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B})$  (congelamiento)

- Para  $Rm \ll 1$   $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \underline{B}$  (difusión)



- Ambos regímenes están presentes en la dinámica de la corona solar.
- [SDO\\_movie.mp4](#) muestra la compleja dinámica de regiones activas y algunas fulguraciones menores.



# Régimen difusivo

- En el régimen  $R_m \ll 1$ , tenemos entonces  $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \underline{B}$ .

- Es decir que  $\underline{B}$  sufre un proceso difusivo. El tiempo de difusión para inhomogeneidades de tamaño  $\lambda$  es

$$\frac{B}{\tau_\lambda} \approx \eta \frac{B}{\lambda^2} \rightarrow \tau_\lambda \approx \frac{\lambda^2}{\eta}$$

- La corriente eléctrica asociada es  $\underline{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{B} \rightarrow J_\lambda \approx \frac{c}{4\pi} \frac{B_\lambda}{\lambda}$

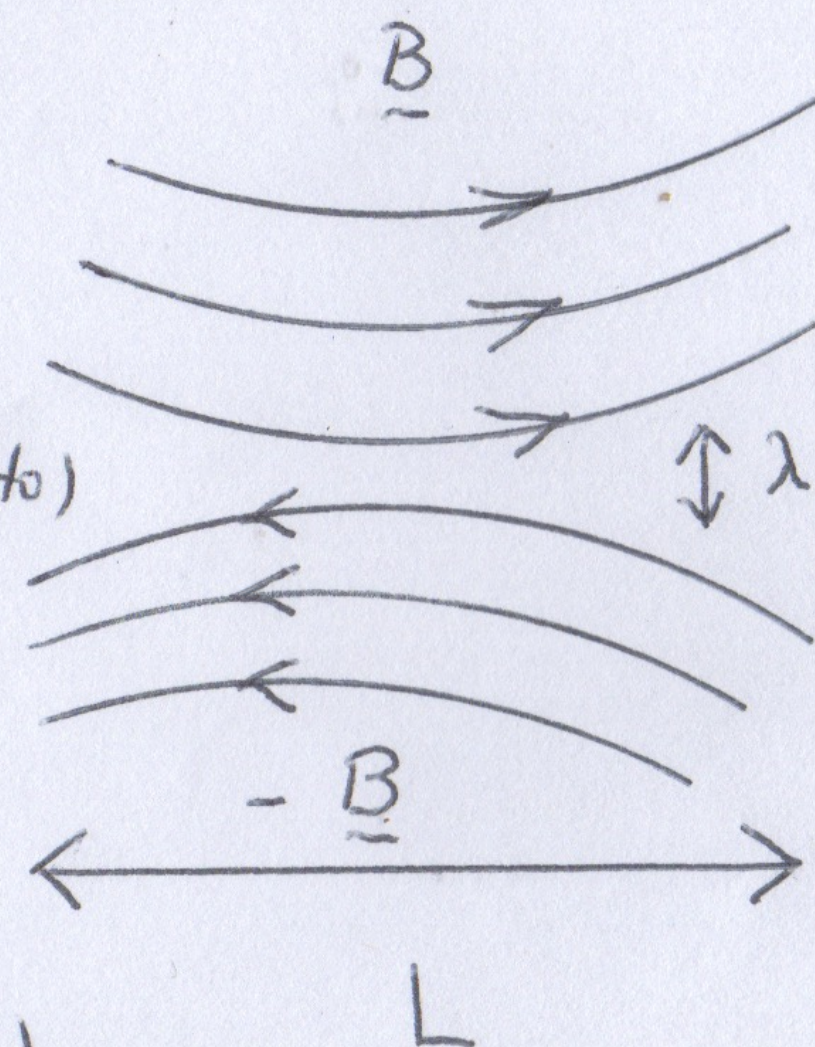
- Un caso particularmente interesante, corresponde a un encuentro de líneas magnéticas de igual intensidad y sentidos opuestos

- Colisión entre dos estructuras macro de tamaño  $L$

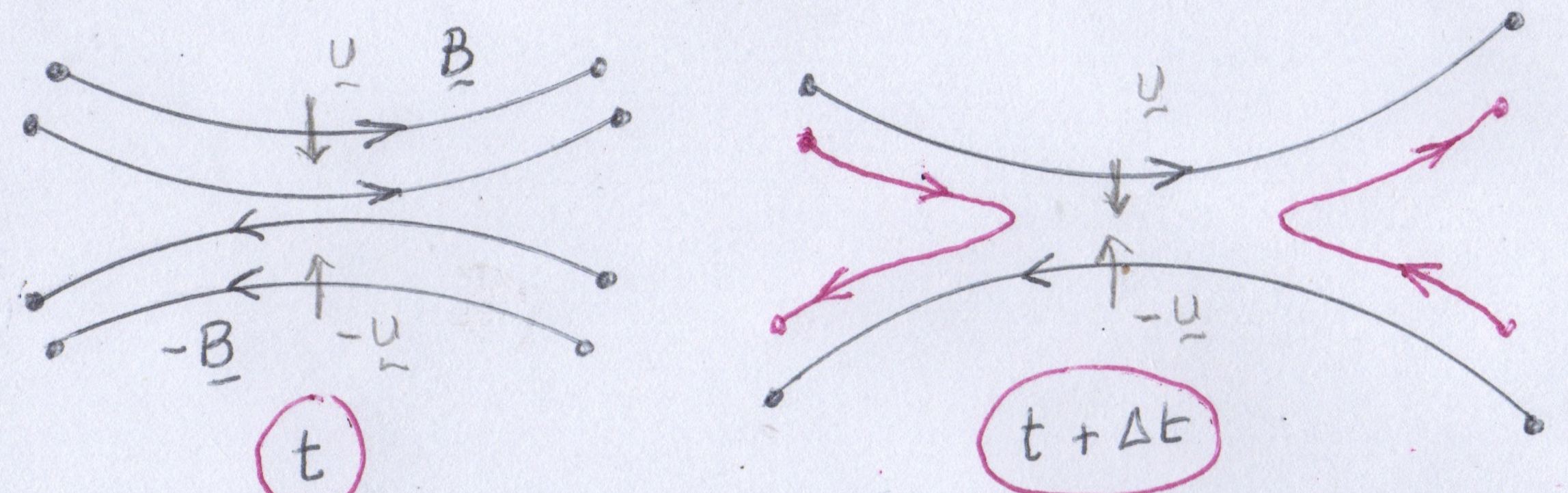
$$R_m^L \sim \frac{uL}{\eta} \gg 1 \text{ (congelamiento)}$$

- Separación  $\lambda \ll L$

$$R_m^\lambda \sim \frac{u\lambda}{\eta} \ll 1 \text{ (difusión)}$$



- En estas circunstancias, se da el fenómeno de reconexión magnética

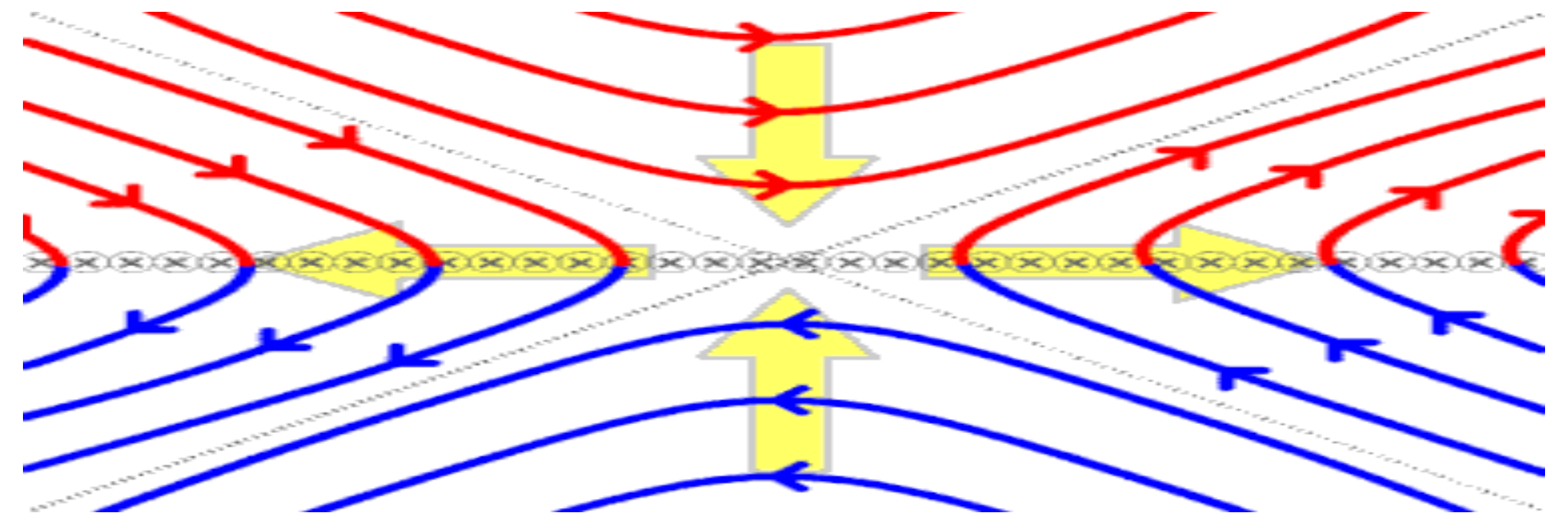


- Las estructuras macro se aproximan con  $\pm \underline{u}$ .  
- La difusión re-conecta líneas



# Reconexión magnética

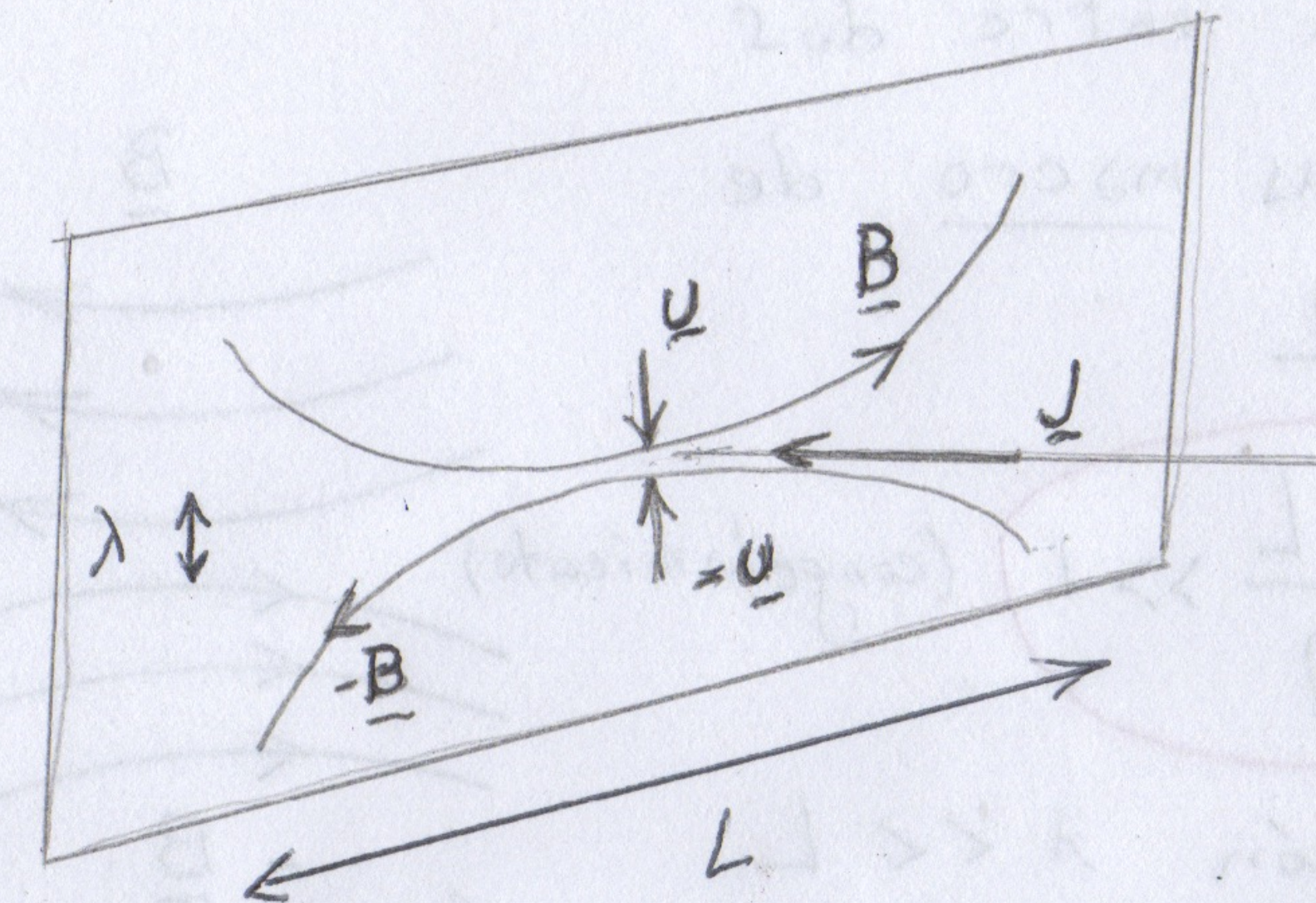
- Las líneas magnéticas y el plasma de las estructuras macro se aproximan desde arriba y abajo, cumpliendo la condición de congelamiento.
- Al ingresar a la región de difusión, cada línea **roja** se reconecta con una línea **azul**. El campo de velocidades se indica en **amarillo**.
- Consistentemente, en la región de difusión circula corriente eléctrica en la dirección perpendicular a la pantalla.



- La densidad de corriente es  $J \sim \frac{c}{4\pi} \frac{B}{\lambda}$
- También tendremos un campo  $\underline{E}$  autoconsistente

$$\underline{E} = \frac{1}{\sigma} \underline{J} \quad \eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

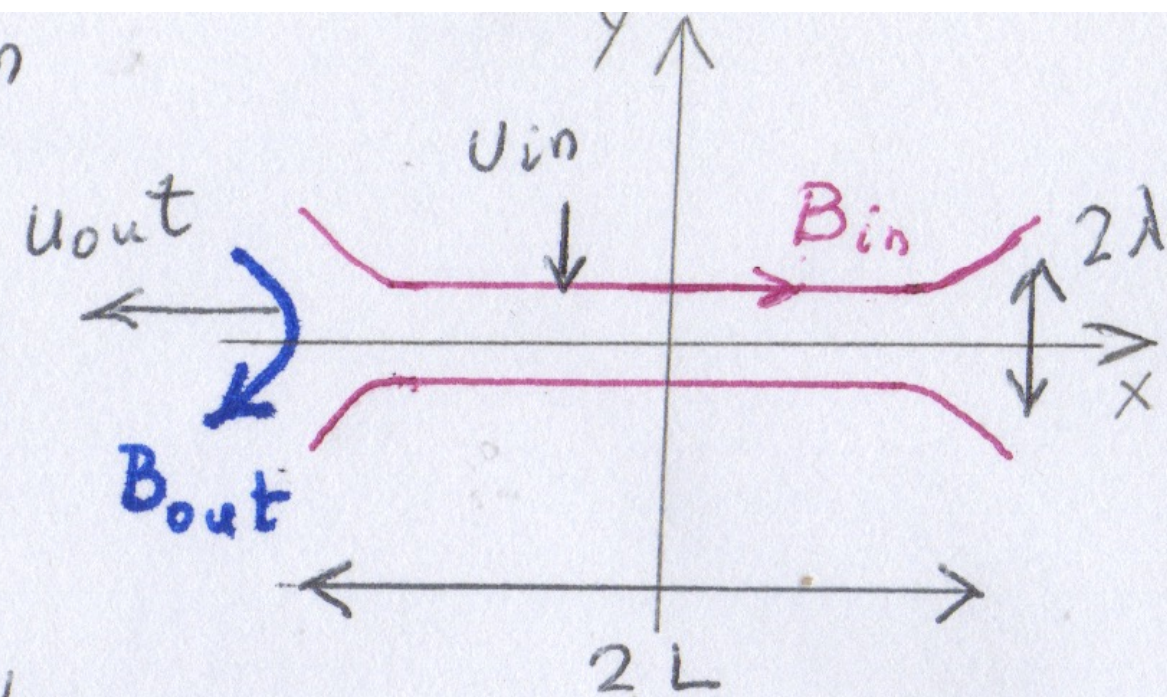
- Una vez reconectadas, las líneas magnéticas y el plasma son eyectados a izquierda y derecha, cumpliendo la condición de congelamiento.





# Modelo de Sweet-Parker (1958)

- Sweet y Parker proponen en 1958 un modelo estacionario, incompresible, 2D de las ecs. MHD.



- Por la ec. continuidad:

$$\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \longrightarrow \rho u_{in} 2L = \rho u_{out} 2\lambda$$

$$u_{in} L = u_{out} \lambda$$

- Por Faraday

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0 \\ \underline{E} = -\frac{1}{c} \underline{u} \times \underline{B} + \frac{1}{\sigma} \underline{j} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{En } \hat{x}: -\frac{1}{c} \frac{\partial B_{in}}{\partial t} = \partial_y E_z \\ E_z = -\frac{1}{c} u_{in} B_{in} + \frac{j_z}{\sigma} \end{aligned}$$

$$\partial_y E_z = 0 \longrightarrow \frac{1}{c} u_{in} B_{in} \approx \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{B_{in}}{\lambda}$$

$$u_{in} \approx \frac{\eta}{\lambda}$$

- La ec. movimiento  $\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}$

- Usando  $(\nabla \times \underline{F}) \times \underline{F} = (\underline{F} \cdot \nabla) \underline{F} - \nabla(F^2/2)$  la transformamos en

$$\rho \underline{u} \times \underline{u} - \frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = -\nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

- Evaluamos la componente  $\hat{y}$  en el eje  $x=0$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{u} \parallel \hat{z} \\ \underline{u} \parallel \hat{y} \\ \underline{B} \parallel \hat{x} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \partial_y \left( \frac{\rho u_{in}^2}{2} + p + \frac{B_{in}^2}{8\pi} \right) = 0$$

$p_0$ : lejos del origen

$$p_0 + \frac{B_{in}^2}{8\pi} = p(0,0)$$

$p(0,0)$ : en el origen

- Ahora la componente  $\hat{x}$  en el eje  $y=0$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{u} \parallel \hat{z} \\ \underline{u} \parallel \hat{x} \\ \underline{B} \parallel \hat{y} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \partial_x \left( \frac{\rho u_{out}^2}{2} + p + \frac{B_{out}^2}{8\pi} \right) = 0$$

$$\frac{\rho u_{out}^2}{2} + p_0 = p(0,0)$$

- Comparando las últimas dos ecuaciones:

$$u_{out} = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$



# Tasa de reconexión magnética

- Los parámetros de las estructuras macro, son los datos del problema:  $\rho, L, B_{in}, \rho_0$

$$v_A = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}} : \text{vel. Alfvén}$$

- De las ecuaciones anteriores, las incógnitas son entonces:  $\lambda, u_{in}, \rho(0,0)$ .

- Para las estructuras macro, podemos definir el número de Lundquist, una suerte de número de Reynolds magnético con velocidad  $v_A$

$$S = \frac{v_A L}{\eta} : \text{número de Lundquist}$$

- Entonces, obtenemos  $u_{in}$  y  $\lambda$ :

$$u_{in} = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{\eta}{v_A L} \cdot \frac{v_A L}{\lambda} = \frac{1}{S} \cdot \frac{v_A L}{\lambda}$$

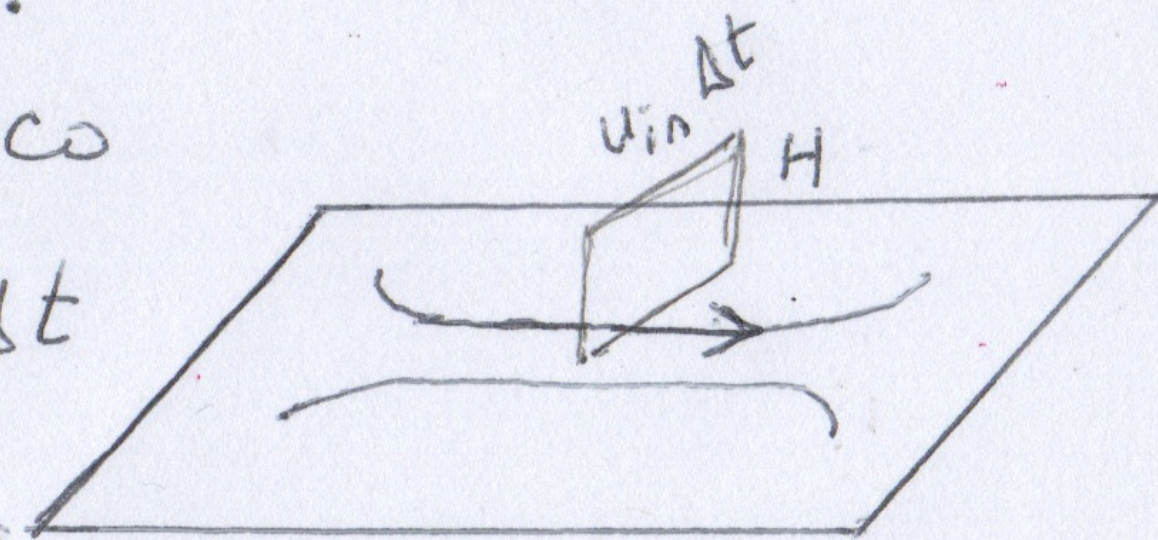
$$\frac{\lambda}{L} = \frac{u_{in}}{v_A} \longrightarrow u_{in} = \frac{1}{S} \cdot v_A \left( \frac{v_A}{u_{in}} \right)$$

$$\left( \frac{u_{in}}{v_A} \right)^2 = \frac{1}{S} \longrightarrow \frac{u_{in}}{v_A} = \frac{\lambda}{L} = S^{-1/2}$$

- Definimos la tasa de reconexión magnética como el flujo magnético reconectado por unidad de tiempo.

- El flujo magnético

$$\Delta\Phi = B_{in} \cdot H u_{in} \Delta t$$



- Como el problema es 2D, la tasa de reconexión es por unidad de altura, es decir

$$R = \frac{1}{H} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B_{in} \cdot u_{in}$$

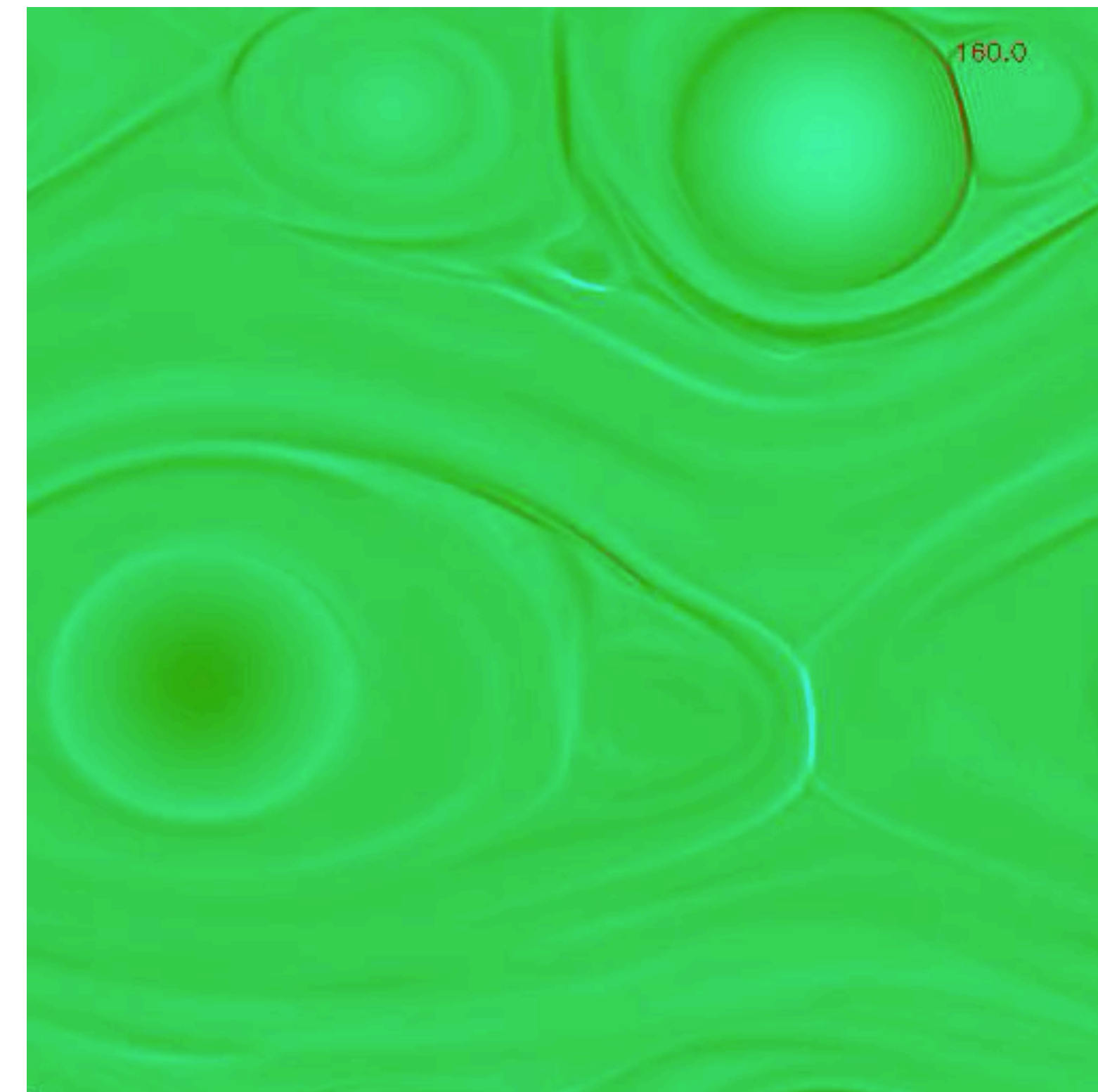
- La tasa de reconexión adimensional, usando los datos  $B_{in}, v_A$ , es

$$R = \frac{1}{B_{in} v_A} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \longrightarrow R = \frac{u_{in}}{v_A} = S^{-1/2}$$



# Reconexión difusiva y rápida

- En la corona solar:  $B \approx 100 \text{ Gauss}$  ,  $n \approx 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Entonces  $v_A \approx 2500 \text{ km/s}$ .
- Para hidrógeno ionizado:  $\eta \approx 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}$  . Con estructuras macro de longitud  $L \approx 10^5 \text{ km}$  , resulta  $S = \frac{v_A L}{\eta} \approx 2.5 \cdot 10^{14}$
- Números de Lundquist enormes como este son comunes en Astrofísica. Entonces, si  $S \gg 1$  resulta que  $R = S^{-1/2} \ll 1$
- La reconexión es un mecanismo de conversión de energía magnética ( $\frac{B_{in}^2}{8\pi}$ ) en cinética ( $\frac{1}{2} \rho v_A^2$ ). Sin embargo, la tasa de reconexión del modelo difusivo de Sweet-Parker, hacen que esa reconexión sea excesivamente lenta.
- Los modelos de reconexión rápida obtienen  $R \approx 0.1 - 1$  y son independientes de S.



- Simulación numérica de reconexión mostrando  $J(x,y,t)$
- Simulación numérica de turbulencia MHD mostrando zonas de reconexión.



# Ecuaciones MHD — Presión magnética

- Recordemos las ecuaciones MHD:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\rho (\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}$$

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}$$

- Podemos descomponer la fuerza magnética a través de una identidad vectorial

$$\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}}_{\text{tensión magnética}} - \underbrace{\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right)}_{\text{presión magnética}}$$

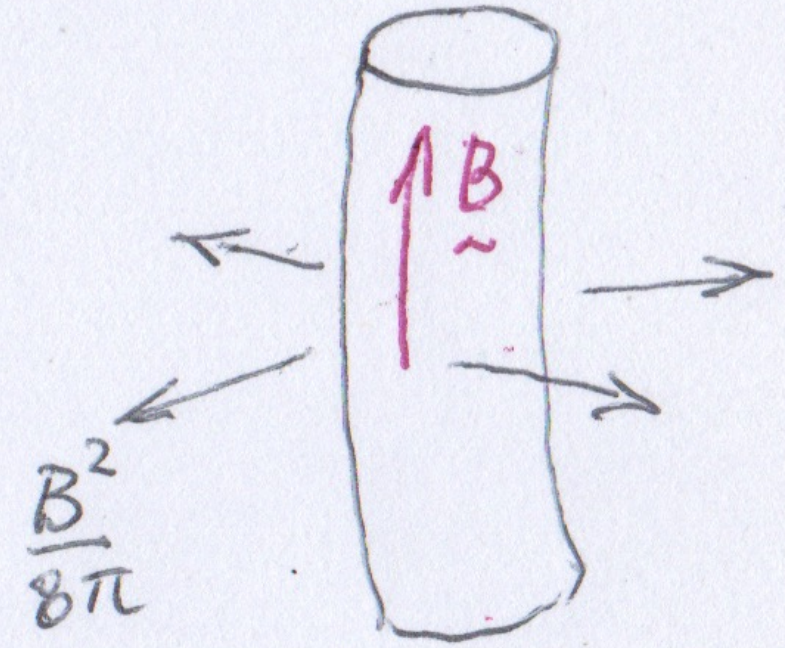
$$\begin{aligned} [(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}]_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jhl} \partial_h B_l B_k \\ &= \epsilon_{jki} \epsilon_{jhl} \partial_h B_l B_k \\ &= B_k \partial_k B_i - B_k \partial_i B_k = [(\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}]_i - \left[ \frac{\nabla B^2}{2} \right]_i \end{aligned}$$

## Presión magnética

- El término de presión magnética se suma directamente a la presión del gas

$$p_{\text{TOT}} = p_{\text{GAS}} + \frac{B^2}{8\pi}$$

- La presión magnética actúa en las direcciones perpendiculares al tubo de flujo magnético (tubo = manojito de líneas).



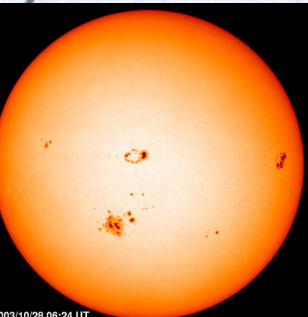
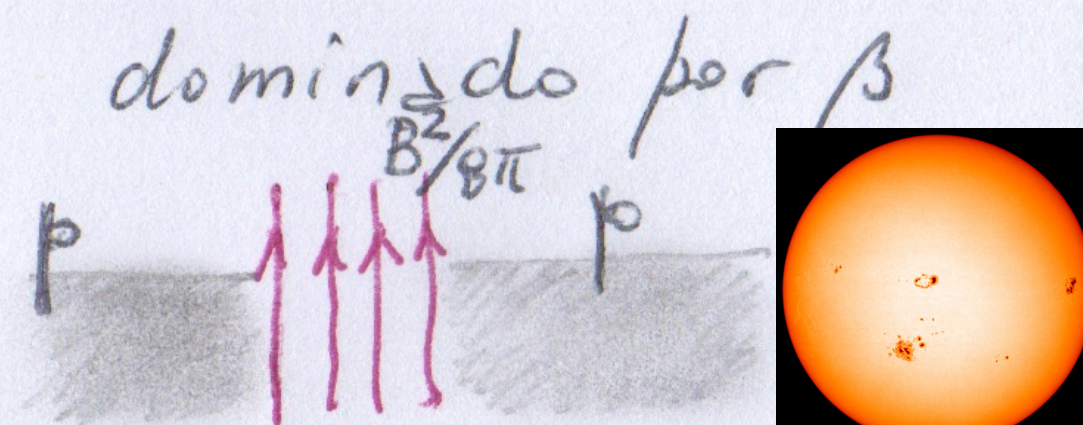
- El parámetro  $\beta$  mide la importancia relativa entre presiones

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$$

$\beta \gg 1$  campo  $\underline{B}$  despreciable

$\beta \ll 1$  dominado por  $\beta$

- Ejemplo: mancha solar





# Ecuaciones MHD — Tensión magnética

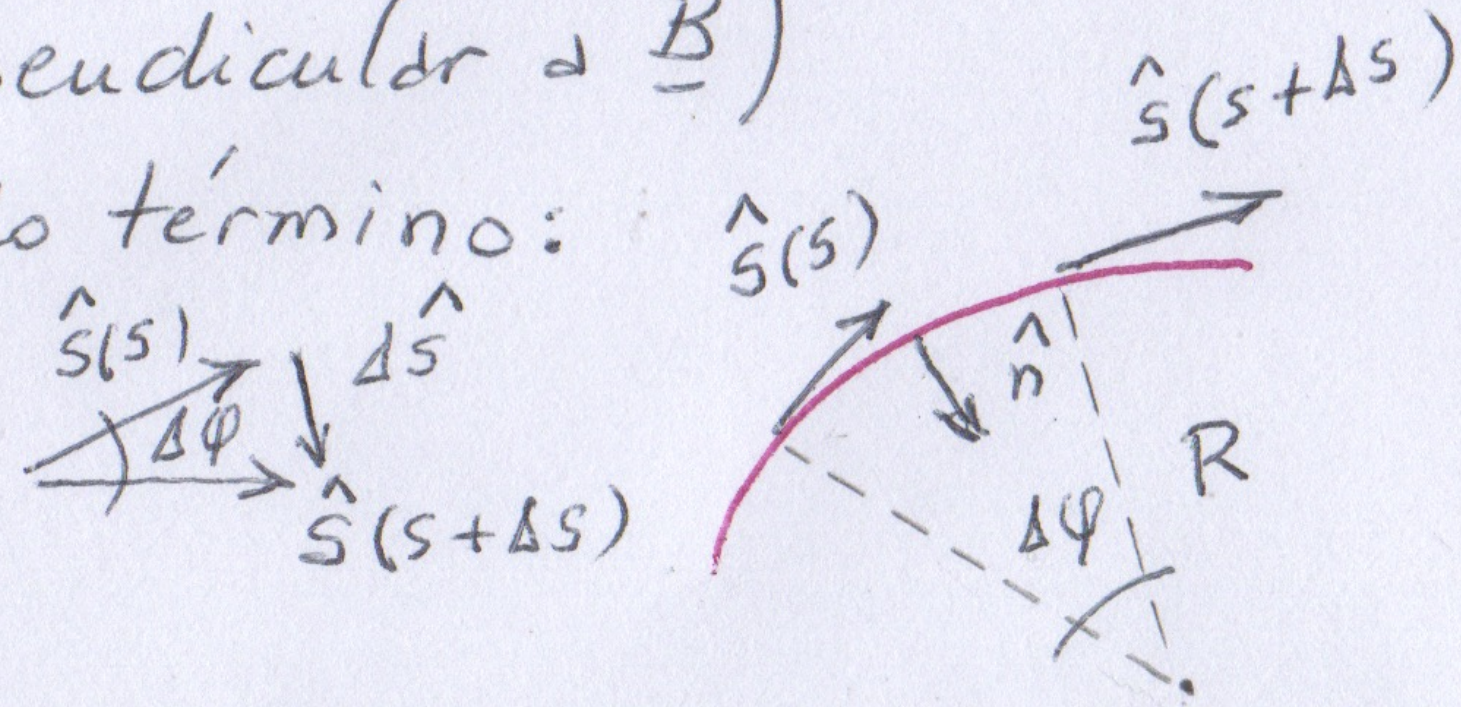
- La tensión magnética mide la variación de  $\underline{B}$  a lo largo de  $\underline{B}$ . Definimos la coordenada curvilínea  $s$  a lo largo de  $\underline{B}$ :

$$\underline{B} = B \hat{s} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = \frac{B}{4\pi} \frac{d}{ds} (B \hat{s})$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = \frac{d}{ds} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) \hat{s} + \frac{B^2}{4\pi} \frac{d\hat{s}}{ds}$$

- El primer término cancela al de presión magnética en la dirección de  $\underline{B}$  (y por lo tanto la presión magnética opera en el plano localmente perpendicular a  $\underline{B}$ )

- Para el segundo término:



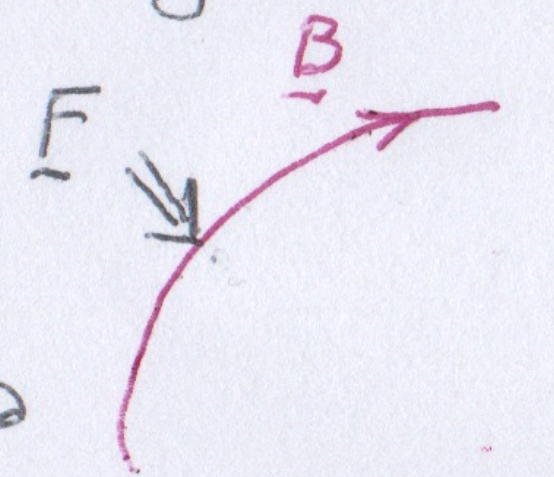
$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{s}}{\Delta s}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{s} &\approx \hat{n} |\hat{s}| \Delta \varphi \\ \Delta s &= R \Delta \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}$$

$R$ : radio de curvatura

- Entonces la fuerza de tensión magnética

$$\frac{1}{4\pi} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\hat{n}}{R}$$



tiende a oponerse a la curvatura de las líneas.

- Ejemplo: líneas reconectadas

Apenas reconectadas, las líneas tienen una alta curvatura ( $R$  pequeño)



La tensión magnética acelera rápidamente a las líneas (y al plasma congelado a ellas)

hasta una velocidad  $v_A = \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}}$



# Ecuaciones MHD — Ondas de Alfvén

- Un equilibrio MHD homogéneo con un campo  $\underline{B}_0$  uniforme, puede propagar ondas que hacen oscilar las líneas de  $\underline{B}$  como cuerdas vibrantes.

- Supongamos que el fluido sea incompresible, es decir  $\rho = \text{cte}$ , y el equilibrio

$$\underline{u}_0 = 0$$

$$p_0 = p_0 = \text{cte}$$

$$\underline{B} = B_0 \hat{z}$$

- Perturbamos a primer orden

$$\underline{\nabla} \cdot \delta \underline{u} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \delta \underline{B}$$

$$\rho = \text{cte}$$

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho$$

$$\underline{u} = \delta \underline{u}$$

$$\underline{B} = B_0 \hat{z} + \delta \underline{B}$$

$$\rightarrow \partial_t \delta \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \delta p + \frac{1}{4\pi\rho} (\underline{\nabla} \times \delta \underline{B}) \times \underline{B}_0$$

$$\partial_t \delta \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\delta \underline{u} \times \underline{B}_0)$$

Proponemos  $\delta \underline{u}, \delta \underline{B} \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$

- Obtenemos  $\underline{k} \cdot \delta \underline{u} = 0 = \underline{k} \cdot \delta \underline{B}$  (ondas transversales)

$$-\omega \delta \underline{u} = -\frac{\mathbf{k}}{\rho} \delta p + \frac{B_0}{4\pi\rho} (k_z \delta \underline{B} - k_z \delta B_z)$$

$$-\omega \delta \underline{B} = B_0 k_z \delta \underline{u}$$

- Multiplicamos la primera ecuación por  $\underline{k} \cdot (\dots)$

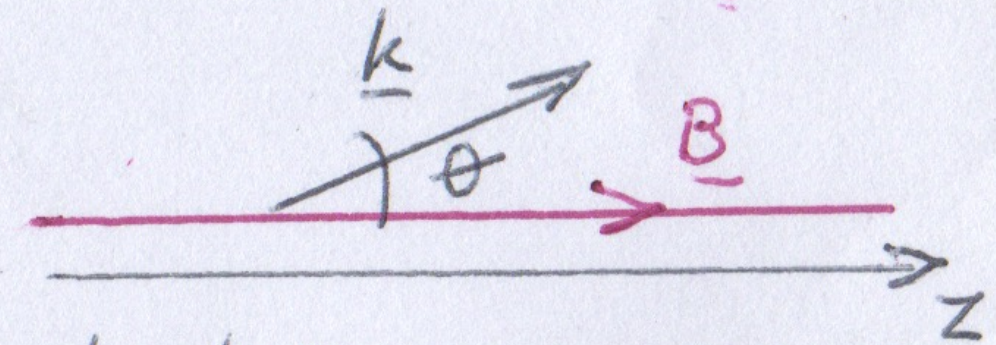
y obtenemos  $\delta p = -\frac{B_0}{4\pi} \delta B_z$

- Combinando ahora ambas ecuaciones

$$\omega^2 = k_z^2 \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$$

- Definimos la velocidad de Alfvén  $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$

$$\omega = \pm v_A k \cos \theta$$



- Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones vectoriales, obtenemos las relaciones de polarización  $\delta \underline{u} = \mp \frac{\delta \underline{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$



# Ecuaciones MHD — Colapso gravitatorio

- En el colapso gravitatorio de un grumo de materia del medio interestelar, la compresión de campo magnético puede ser importante (¿?)

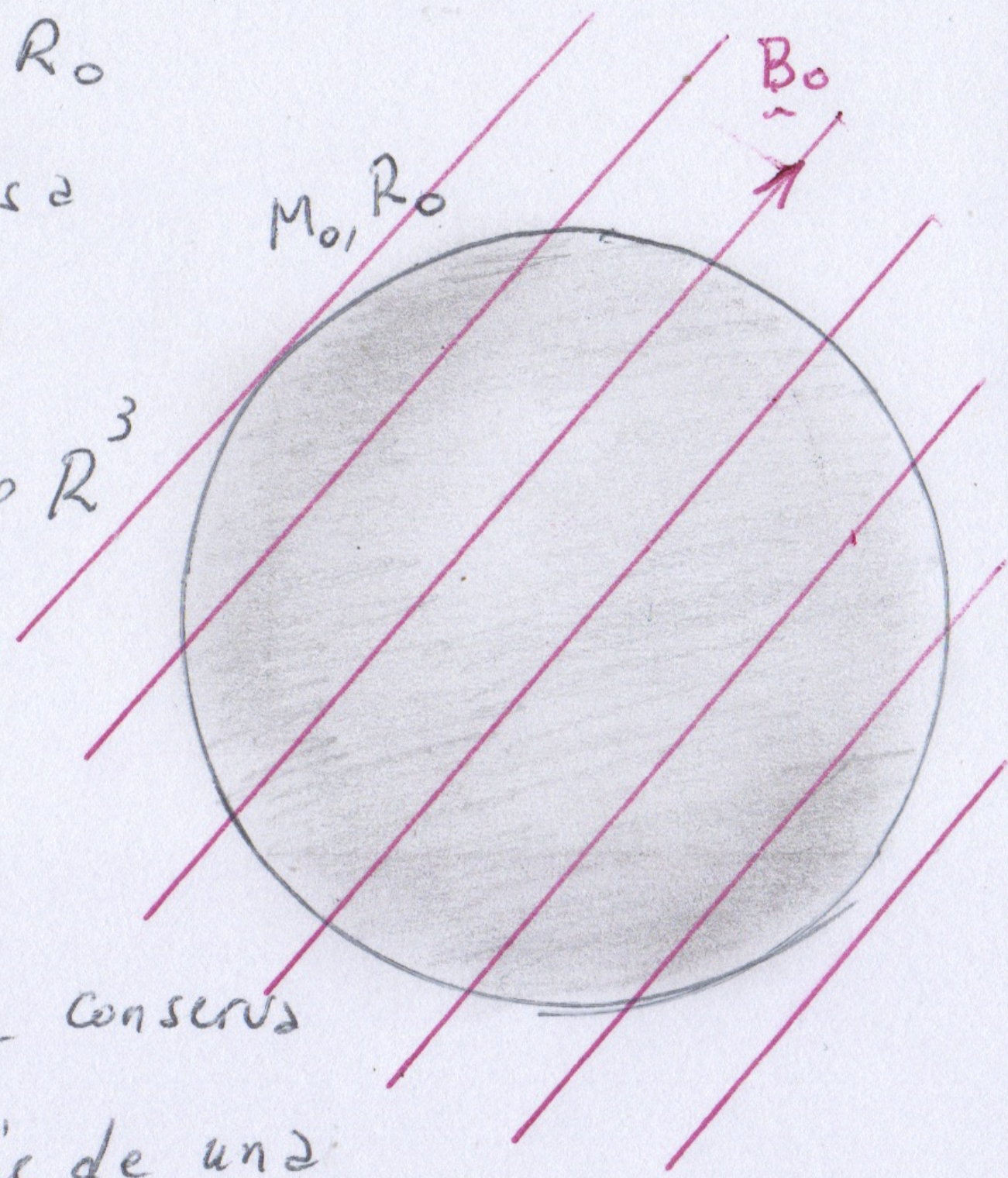
- Un grumo de radio  $R_0$  con masa  $M_0$ , colapsa conservando su masa

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3$$

- Por congelamiento, se conserva el flujo de  $\underline{B}$  a través de una superficie perpendicular a  $\underline{B}$  que colapsa con el grumo

$$\Phi_0 = B_0 \pi R_0^2 = B \pi R^2$$



- Entonces

$$B = B_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2$$

- Puede verse que la densidad de masa se compacta más que la densidad de líneas de  $\underline{B}$ .

- Para ver que pasa con las presiones, supongamos que cumple una relación politrópica

$$\text{Entonces } p = p_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}$$

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

- El parámetro  $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$  resulta

$$\beta = \beta_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma-4}$$

$$\gamma < 4/3 \rightarrow \beta < \beta_0$$

En este caso el rol de  $\underline{B}$  es progresivamente importante en el colapso

