Astrofísica

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre de 2016

Práctica 9: Cosmología.

1. Considere un Universo infinito, homogéneo, isótropo y eterno. La densidad numérica de galaxias en este Universo es n, y la función de luminosidad para las galaxias es $\phi(L)$, de modo tal $\phi(L)dL$ es la probabilidad de encontrar una galaxia con luminosidad entre L y $L+dL$, y $\int_0^\infty \phi(L)dL = 1$.

   (a) Muestre que la distribución $\varphi(q)$ del flujo de radiación observado de una galaxia (q) es proporcional a $q^{-3/2}$, independientemente de la forma de $\phi(L)$. Discuta cómo usaría un histograma de flujos de galaxias (número de galaxias observadas con un flujo dado en función del flujo) para estimar una posible variación de n con la distancia a la Tierra.

   (b) Muestre que el flujo total de radiación recibido en la Tierra es infinito, en clara contradicción con la simple observación de que el cielo es oscuro (*paradoja de Olbers*). ¿Qué posibles soluciones encuentra a esta paradoja?

2. Considere un Universo compuesto por un fluido homogéneo e isótropo de densidad ρ y velocidad $\vec{v}$, que evoluciona en el tiempo t ($t = 0$ es el instante actual).

   (a) A partir de la ecuación de continuidad, obtenga la *ley de Hubble*, $\vec{v} = H(t)\vec{r}$, donde $\vec{r}$ es el vector posición y H es una función del tiempo ($H_0 = H(0)$ es la *constante de Hubble*). Discuta por qué esto implica que el Universo se está expandiendo, cuál es el origen de coordenadas, y de qué modo puede verificarse observacionalmente esta ley.

   (b) Se define $R(t)$ mediante $H(t) = (1/R)dR/dt$. Calcule, a partir de la ecuación de continuidad, la relación entre R y ρ. Discuta cuál es el significado físico de R y por qué se suele denominar *radio del Universo*. ¿Implica esto que el Universo sea finito y esférico?

   (c) A partir de la ecuación de Euler y de la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio, obtenga la ecuación de movimiento para R,

   $$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3}\frac{G\rho_0 R_0^3}{R^2}, \tag{1}$$

   donde G es la constante de gravitación universal, y ρ_0 y R_0 son la densidad y el radio actuales del Universo, respectivamente.

   (d) Integre una vez la ecuación anterior para obtener

   $$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - k, \tag{2}$$

   donde k es una constante que puede valer 0, 1, o -1. Discuta por qué no se consideran otros valores de k.

   (e) Muestre que para $k = -1$ y 0 el Universo se expande indefinidamente, mientras que para $k = 1$ alcanza un radio máximo $R_m = 8\pi G\rho_0 R_0^3/3$ y luego se contrae.

   (f) Definiendo el parámetro de densidad $\Omega = 8\pi G\rho/3H^2$, muestre que $k = 0$, 1 y -1 implican respectivamente $\Omega_0 = 1$, > 1 y < 1. Discuta el origen de la relación entre la densidad y la expansión o contracción del Universo.

   (g) El fluido del Universo contiene tanto materia, que ejerce una presión p_{m}, como radiación, que ejerce una presión p_{r}. Use la ecuación de transporte de calor para mostrar que si $p_{\mathrm{r}} \ll p_{\mathrm{m}}$, la temperatura del fluido es $T \propto R^{-2}$, mientras que si $p_{\mathrm{r}} \gg p_{\mathrm{m}}$, $T \propto R^{-1}$.