Astrofísica

2$^{\text{do}}$ cuatrimestre de 2018

Práctica 2: Fluidos clásicos.[1]

1. Derive, en el caso general, las expresiones para el flujo de momento $\vec{p} = m\vec{v}$ y de energía $E = mv^2/2$ de un gas de partículas de masa m. Indique el significado físico de cada uno de los términos.

2. (*) Un gas en equilibrio termodinámico local (LTE) es aquel cuya distribución de momentos $\vec{p}$ es localmente la de Maxwell–Boltzmann, con una temperatura T, una densidad numérica n y una velocidad media $\vec{u}$ que pueden depender de la posición $\vec{r}$. Para este sistema,

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{n(\vec{r})}{(2\pi mkT(\vec{r}))^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{(\vec{p}-mu(\vec{r}))^2}{2mkT(\vec{r})}}, \tag{1}$$

donde k es la constante de Boltzmann y m la masa de las partículas.

   (a) Verifique que el campo de densidad numérica del fluido es efectivamente $n(\vec{r})$.

   (b) Considerando el caso $\vec{u} = 0$, halle para un dado $\vec{r}$ la distribución de $v = |\vec{v}|$, siendo $\vec{v} = \vec{p}/m$ la velocidad de las partículas. Encuentre también la distribución de la energía E de las partículas.

   (c) Considerando nuevamente el caso $\vec{u} = 0$, calcule $\langle v \rangle$ (la velocidad media), $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ (la velocidad cuadrática media), $\bar{v}$ (el valor más probable de v) y $\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$ (la dispersión de velocidades).

3. Dados la masa M y radio R de los planetas, y la temperatura T de sus atmósferas (o superficies en caso de no poseer atmósfera; busque estos datos en la literatura), calcule:

   (a) La velocidad de escape v_e de cada planeta (i.e., la velocidad mínima necesaria para enviar un cuerpo desde la superficie del planeta al infinito). Ubique cada planeta en un gráfico de v_e en función de T (sugerencia: use escalas logarítmicas en ambos ejes).

   (b) En el mismo gráfico del punto anterior, trace las curvas de velocidad más probable $\bar{v}$ en función de T, para las partículas de los siguientes gases: H, He, H_2O, NH_3 (amoníaco), CH_4 (metano), O_2, N_2 y CO_2. Interprete físicamente el gráfico obtenido.

4. (*) La fotósfera de estrellas típicas tiene una temperatura de 6000K. Esta energía térmica hará que los átomos de aquellos elementos que la componen posean movimientos erráticos y por ende que sus emisiones características sufran el llamado ensanchamiento de las líneas espectrales (debido al efecto Doppler-Fizeau).

   (a) Estime dicho ensanchamiento para algún átomo abundante de la fotósfera estelar.

   (b) Si ahora consideramos una estrella ubicada en uno de los brazos de nuestra galaxias, el corrimiento de su espectro podría darnos una estimación de la magnitud de la rotación de la galaxia. Teniendo en cuenta el ensanchamiento mencionado más arriba ¿Qué condición debe darse para que así sea?

   (c) En el espectro de una estrella, la línea del Ca II, de longitud de onda $\lambda = 3969$Å en el laboratorio, nos llega modificada como resultado de la rotación galáctica: se espera que esta línea sufra corrimientos hacia el rojo o hacia el azul de magnitud $|z| \sim 10^{-3}$, correspondientes a variaciones de 4Å en λ ¿Es este valor mayor o menor que el asociado al ensanchamiento de esta línea espectral por efecto Doppler-Fizeau?

5. Considere un fluido ideal en condiciones de LTE. Calcule el tensor de presiones $\mathcal{P}$ y, usando la definición de la presión hidrostática $p \equiv \mathrm{Tr}(\mathcal{P})/3$, halle su ecuación de estado.

6. Demuestre que en un fluido incompresible en reposo en un potencial externo ϕ, la presión, densidad y temperatura son constantes sobre las equipotenciales.

[1] Los ejercicios indicados con (*) son prioritarios.

7. Para una estrella de una dada masa, existe una velocidad de rotación límite por encima de la cual el sistema se vuelve inestable ya que la fuerza centrífuga debida a la rotación supera a la atracción gravitatoria. Estime la magnitud de esta velocidad de corte para el Sol y compárela con la velocidad de rotación observada.

8. (*) Considere un planeta fluido de masa M, en rotación a velocidad angular ω. Suponiendo que el fluido se encuentra en reposo en un sistema de coordenadas que rota con el planeta y que además es incompresible:

   (a) Muestre que las fuerzas de volumen sobre un elemento de fluido pueden describirse por medio de un potencial ϕ, y dé una expresión para el mismo.

   (b) Sabiendo que la superficie del fluido es una isobara, describa la forma que tendrá el planeta.

   (c) Encuentre el achatamiento (cociente entre los diámetros polar y ecuatorial) del planeta en función de ω, M y constantes fundamentales.

   (d) Calcule el achatamiento de Saturno, y compare con el valor observado.

9. La atmósfera de un planeta de masa M y radio R puede describirse como un gas ideal de partículas de masa m en condiciones de LTE. Si r es la distancia al centro del planeta y $z = r - R$ es la altura sobre la superficie:

   (a) Suponiendo que $T = \text{cte}$ (atmósfera isotérmica), halle la variación de la presión p y la densidad ρ con la distancia al centro del planeta. Suponga $z \ll R$. Interprete físicamente la altura de escala, $H = kT/mg$.

   (b) Muestre que la densidad de columna (la integral de la densidad en la dirección vertical) de la atmósfera es $\rho_0 H$, donde $\rho_0 = \rho(z = 0)$.

   (c) Repita el punto 9a para el caso de una atmósfera adiabática, $p\rho^{-\gamma} = \text{cte}$, donde γ es el cociente de los calores específicos a presión y volumen constante ($\gamma = 5/3$ para un gas ideal monoatómico).

   (d) Halle ahora la variación de la densidad y presión en el plano ecuatorial del planeta, para el caso isotérmico y eliminando la restricción $z \ll R$.

   (e) Repita el punto 9d, pero ahora suponiendo que el planeta rota con velocidad angular ω. Note que el resultado es válido mientras el potencial origine una fuerza hacia el centro del planeta. Halle la distancia al centro para la cual esto deja de ocurrir (plasmapausa).

10. **Inestabilidad convectiva**. Considere una atmósfera con partículas de masa m, calor específico a presión constante c_p, y un gradiente térmico $\partial T/\partial z = -\alpha$ ($\alpha > 0$), siendo z la coordenada vertical. Una columna de fluido asciende en dicha atmósfera en forma adiabática con velocidad v_0, sin perturbar la estructura general de la misma.

   (a) Muestre que la ecuación de balance de calor para la columna de fluido es

   $$\frac{mc_p}{kT}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{H} = 0, \tag{2}$$

   donde k la constante de Boltzmann, g la aceleración de la gravedad y $H = kT/mg$ la altura de escala.

   (b) Calcule la variación temporal de la temperatura de un elemento de fluido de la columna e interprete físicamente el resultado.

   (c) Muestre que si $\alpha < g/c_p$, donde g es la aceleración local de la gravedad, el fluido de la columna está más frio que el fluido circundante, y lo contrario ocurre cuando $\alpha > g/c_p$. Explique por qué en este caso la atmósfera se vuelve inestable y se desarrolla el proceso de convección.

11. (*) Considere la atmósfera de un planeta en rotación a una velocidad angular ω. Suponga que el fluido se mueve a una velocidad v_0 horizontal en el sistema que rota con el planeta (viento geostrófico).

   (a) Considerando las fuerzas gravitatoria y de Coriolis, halle las ecuaciones para las dos componentes de v_0. Muestre que $\vec{v_0} \perp \vec{\nabla} p$.

(b) Muestre explícitamente que en el hemisferio norte del planeta (aquel en el cual el planeta se ve girar en sentido antihorario), el viento gira en sentido horario alrededor de un centro de alta presión (anticiclón), en sentido antihorario alrededor de un centro de baja presión (ciclón), y que lo contrario ocurre en el hemisferio sur.

(c) Debido a que recibe mayor cantidad de calor, el ecuador del planeta se comporta (considerando escalas de tiempo largas comparadas con el período de rotación del planeta) como un centro de alta presión, y lo contrario ocurre para sus polos. Usando las ecuaciones deducidas anteriormente, explique por qué en la atmósfera de Júpiter y Saturno aparecen bandas de nubes paralelas al ecuador. Las bandas de hemisferio norte, ¿giran en el mismo sentido que las del hemisferio sur?

12. (a) Demuestre que un fluido compuesto por varias especies se comporta como uno de una única especie con un peso molecular medio $\mu = \sum_i \mu_i n_i / \sum_i n_i$, donde μ_i y n_i son, respectivamente, el peso molecular y la densidad numérica de la especie i. Considere que el fluido se comporta como un gas ideal.

(b) Calcule el peso molecular medio del gas primordial del Universo ($X = 0.77$, $Y = 0.23$), supuesto en estado neutro.

(c) Calcule el peso molecular medio de la atmósfera solar ($X = 0.747$, $Y = 0.246$, $Z = 0.017$). Considere todas las especies en estado neutro. Realice las hipótesis que crea convenientes.

(d) Calcule ahora el peso molecular medio del plasma en el interior solar pero fuera del núcleo ($X = 0.747$, $Y = 0.246$, $Z = 0.017$). Suponga que el mismo está completamente ionizado.