Guía 0: Repaso de Matemática

Física de los sistemas biológicos - 2^o cuatrimestre 2006

1. **Autovalores y autovectores**

   a) Calcular el determinante, la traza, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Encontrar la fórmula general para los autovalores de una matriz de 2x2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Mostrar que:

   1) $Traza(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

   2) $Det(A) = \lambda_1 \, \lambda_2$

2. **Desarrollo de Taylor**

   El desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor del punto x_0 viene dado por:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2/(2!) + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i/i! \end{aligned}$$

   Ejemplo: Para calcular el desarrollo de Taylor del $\operatorname{sen}(x)$ alrededor del punto 0, hacemos las siguientes evaluaciones: $\operatorname{sen}(0) = 0$; $\operatorname{sen}^{(1)}(0) = \cos(0) = 1$; $\operatorname{sen}^{(2)}(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$; $\operatorname{sen}^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$; $\operatorname{sen}^{(4)}(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$; y a partir de allí se repite el ciclo de funciones.

   Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= 0 + x + 0 - x^3/3! + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i+1}/(2i+1)! \end{aligned}$$

   a) Desarrollar las funciones $\cos(x)$ y e^x alrededor de $x_0 = 0$.

   b) *Para hacer en Matlab:* Graficar algunas de las sumas parciales de la serie (es decir, el polinomio hasta diversos grados), y comparar con el gráfico de la función original (el seno, el coseno, o la exponencial).

3. **Ecuaciones diferenciales**

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en 1-d viene dada por:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

donde la notación $\dot{x}$ significa la derivada (total) con respecto a la variable independiente t (que interpretaremos como el tiempo). La solución de la ecuación es una función $x(t)$ que al ser sustituída en (1) satisface la igualdad y la condición inicial $x(0) = x_0$. Si la función $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) (es lineal), entonces la anterior es una ecuación diferencial lineal.

a) Dada la siguiente ecuación diferencial lineal:
$\dot{x} = ax + b$
$x(0) = 0$
Encontrar la solución exacta a la ecuación, $x(t)$, y analizar el comportamiento del sistema según el valor del parámetro a.

b) Analizar las siguientes ecuaciones gráficamente. Encontrar todos los puntos fijos y determinar su estabilidad. Graficar cualitativamente $x(t)$ para diferentes condiciones iniciales.

1) $\dot{x} = 4x^2 - 16$
2) $\dot{x} = x - x^3$
3) $\dot{x} = 1 - 2\cos(x)$
4) $\dot{x} = 1 - x^2$

4. **Crecimiento de poblaciones**

El modelo más sencillo por el crecimiento de una población es $\dot{N} = rN$, donde $N(t)$ es la población al tiempo t y r es la tasa de crecimiento ($r > 0$). Mostrar que este modelo predice una tasa de crecimiento exponencial.

El modelo exponencial tiene una aplicación limitada porque el crecimiento no puede seguir para siempre. Una posibilidad es considerar efectos de sobrepoblación o de recursos limitados, teniendo en cuenta una tasa de crecimiento tal que si N es un número suficientemente chico la población crece exponencialmente pero si es un número relativamente grande, la tasa de crecimiento se vuelve negativa. La forma más sencilla de tener en cuenta estos aspectos es considerar una tasa de crecimiento que disminuye linealmente con N (modelo de **crecimiento logístico**):

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

donde K es una constante positiva que se suele denominar capacidad de carga. Graficar $\dot{N}$ en función de N, encuentrar los puntos fijos y graficar cualitativamente las soluciones $N(t)$ para diferentes condiciones iniciales. Esta es una ecuación diferencial no lineal que puede resolverse analíticamente. Encuentre la solución y verifique que $N = K$ es la solución asintótica para tiempos largos ($N(t) \longrightarrow K$ si $t \longrightarrow \infty$).

5. **Campos escalares y vectoriales. Operadores**

campo escalar: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Ejemplo: la concentración de una sustancia en función de la posición, $[X] = [X](x, y, z)$

campo vectorial: $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = f_x(x, y, z)\hat{x} + f_y(x, y, z)\hat{y} + f_z(x, y, z)\hat{z}$
Ejemplo: el campo electrostático debido a una distribución de cargas (es un vector que depende de la posición (x, y, z)).

- **Rotor** de un campo vectorial $F(x, y, z) = f_x(x, y, z)\hat{x} + f_y(x, y, z)\hat{y} + f_z(x, y, z)\hat{z}$
  $\nabla\times$: campo vectorial $\longrightarrow$ campo vectorial
  $\nabla \times F = \hat{x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$
  Un campo tienen rotor no-nulo cuando hay circulación. Supongamos que el campo es el de velocidades de un fluido. Supongamos que estamos viendo el remolino que se forma al desagotar la bañadera. El rotor del campo de velocidades cerca de la rejilla tiene rotor no-nulo (si pongo allí un “molino”, comenzará a rotar).
- **Gradiente** de un campo escalar $f(x, y, z)$
  ∇ : campo escalar $\longrightarrow$ campo vectorial
  $\nabla f = \mathrm{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$
  Indica la dirección de máximo crecimiento de f. Es perpendicular a las superficies de nivel (superficies en las que $f(x, y, z)$ =cte).
- **Divergencia** de un campo vectorial $F(x, y, z) = f_x(x, y, z)\hat{x} + f_y(x, y, z)\hat{y} + f_z(x, y, z)\hat{z}$
  $\nabla.$: campo vectorial $\longrightarrow$ campo escalar
  $\nabla.F = \mathrm{div}(F) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$
  Representa el flujo del campo a través de un volumen infinitesimal centrado en el punto (x, y, z). Ejemplo con el campo eléctrico: la divergencia del campo que rodea a una carga positiva es positivo (es una fuente de campo eléctrico), mientras que lo contrario ocurre para una carga negativa (sumidero).
- **Laplaciano** de un campo escalar $f(x, y, z)$
  ∇^2 : campo escalar $\longrightarrow$ campo escalar
  $\nabla^2 f = \nabla.(\nabla f) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f$
  Es la divergencia del gradiente de un campo escalar.