# Guía 1: Sistemas dinámicos

## Física de los sistemas biológicos - $2^o$ cuatrimestre 2006

**Sistemas dinámicos en 1 dimensión. Puntos fijos y estabilidad.**

1. Analizar las siguientes ecuaciones diferenciales gráficamente. Clasificar todos los puntos fijos usando el criterio de estabilidad lineal o gráficamente si el criterio falla porque $x^*$ es un punto fijo pero $f'(x^*) = 0$. Graficar cualitativamente $x(t)$ para diferentes condiciones iniciales.

   *a)* $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$

   *b)* $\dot{x} = x^2(6-x)$

   *c)* $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

**Sistemas dinámicos lineales en 2 dimensiones**

2. Graficar trayectorias en el espacio de fases $(x, y)$ (*) para un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   que tenga los siguientes autovalores y autovectores:

   *a)* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   *b)* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   *c)* $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

   * *espacio de fases*: el espacio de las variables dinámicas que caracterizan el sistema, de modo que su evolución quede escrita en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas primeras para dichas variables). Una trayectoria en el espacio de fases es una "curva" que corresponde a una solución de las ecuaciones de evolución.

3. Considerar el siguiente sistema: $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 2x + y$.

   *a)* Escribir el sistema en forma matricial: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ . Encontrar el polinomio característico del sistema, los autovalores y autovectores de $A$.

   *b)* Dar la solución general del sistema.

   *c)* Clasificar el punto fijo del origen.

   *d)* Resolver el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

4. Considerar el siguiente sistema: $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x + y$.

   *a*) Escribir el sistema en forma matricial: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y mostrar que los autovalores son $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$ con autovectores $\mathbf{v_1} = (i, 1)$ y $\mathbf{v_2} = (-i, 1)$. Notar que los autovalores son complejos conjugados, así como los autovectores. Esto siempre es así cuando $A$ tiene coeficientes reales y autovalores complejos.

   *b*) Dar una solución general al sistema, expresando $x(t)$ en términos de funciones reales. *Ayuda*: Usar que $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$

   *c*) Graficar algunas trayectorias en el espacio de fases.

5. Graficar trayectorias en el espacio de fases y clasificar el punto fijo del origen para cada uno de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales, mostrarlos en el gráfico

   *a*) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2x - 3y$

   *b*) $\dot{x} = 5x + 10y$, $\dot{y} = -x - y$

   *c*) $\dot{x} = 3x - 4y$, $\dot{y} = x - y$

   *d*) $\dot{x} = -3x + 2y$, $\dot{y} = x - 2y$

6. *Oscilador armónico*. Considerar la ecuación para el oscilador armónico $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ (que corresponde, por ejemplo, a la que describe el movimiento de una masa $m$ conectada a un resorte ideal de constante $k$ donde $\omega^2 = k/m$).

   *a*) Escribir la solución general para cualquier condición inicial. "Descomponer" la ecuación de evolución (que es de segundo orden) en dos ecuaciones que sólo contengan derivadas primeras usando como variables $x$ y $v = \dot{x} = dx/dt$.

   *b*) Dibujar (algunas de) las trayectorias posibles en el espacio de fases $(x, v)$.

   *c*) ¿Existe algún punto fijo (o punto de "equilibrio"), es decir, una trayectoria que es sólo un punto en el espacio de fases?

   *d*) Re-escribir las ecuaciones dinámicas en términos de las siguientes variables: $r \equiv \sqrt{\omega^2 x^2 + v^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{v}{\omega x}\right)$. ¿Qué significado tienen estas variables desde un punto de visto geométrico? Note que $r \geq 0$ siempre. ¿Cómo quedan descriptas las trayectorias en términos de estas variables?

7. Resolver el siguiente sistema lineal (o sea, dar $x(t)$ e $y(t)$ ):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \mu x - y \\ \dot{y} & = & x + \mu y \end{array} \right.$$

   ¿Cómo son las trayectorias para $\mu < 0$ y $\mu > 0$?

**Bifurcaciones sencillas.**

8. Analizar los puntos fijos de los siguientes sistemas dinámicos en función de los valores (positivos y negativos) del parámetro $\mu$. Graficar la posición de los puntos fijos para los diferentes valores del parámetro $\mu$ (*diagrama de bifurcaciones*). Mostrar que el número de puntos fijos y su estabilidad cambia para un determinado valor de $\mu$.

   *a*) bifurcación saddle-node $\dot{x} = \mu - x^2$

   *b*) bifurcación tridente $\dot{x} = \mu x - x^3$

   *c*) bifurcación de Hopf $\dot{r} = \mu r - r^3$, $\dot{\theta} = 1$ (con $r$ una variable radial y $\theta$ angular). Diga si los puntos fijos existen y si son estables para cualquier valor de $\mu$.

**Sistemas dinámicos no lineales en 2 dimensiones**

9. Considerar el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{r} = f(r), \quad \dot{\theta} = \frac{4\pi}{r} + 1,$$

donde $r$ es una variable radial, $\theta$ una variable angular y

$$f(r) = \begin{cases} -r + \frac{r^2}{r_c}, & 0 \leq r \leq r_c, \\ r - r_c - \frac{(r-r_c)^2}{1-r_c}, & r_c < r < 1, \\ 1 - r, & r \geq 1. \end{cases}$$

Encontrar sus puntos fijos y órbitas periódicas. Diga si son estables o inestables. Graficar algunas trayectorias en el espacio de fases.

10. Calcular los puntos fijos del siguiente sistema para $0 < \delta < \sqrt{8}$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y \end{cases}$$

Calcular los autovalores para cada punto fijo y clasifíque los mismos según si son estables, inestables o puntos de ensilladura. *Para hacer en Matlab*: Realizar un retrato de fases para estos parámetros. ?' Que sucede con el retrato de fases para $\delta > \sqrt{8}$.

11. Considere el modelo de Gray-Scott:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &\equiv \dot{u} = -uv^2 + A(1-u), \\ \frac{dv}{dt} &\equiv \dot{v} = uv^2 - Bv + F, \end{aligned}$$

que describe la evolución temporal de las concentraciones $u \equiv [U]$ y $v \equiv [V]$ de dos reactivos que reaccionan de acuerdo a $U + 2V \rightarrow 3V$, $V \rightarrow P$ (con $P$ un producto inerte) y donde las especies $U$ y $V$ son inyectadas y removidas de la región donde ocurre la reacción.

*Para hacer en Matlab*: Estudiar los comportamientos del sistema para los siguientes conjuntos de valores de parámetros explorando distintas condiciones iniciales.

a) Excitabilidad: $A = 0{,}02$, $B = 0{,}07$, $F = 0$;
b) Bifurcación de saddle-node: $B = 0{,}2$, $F = 0$ y $A = \{0{,}158, 0{,}159, 0{,}1598, 0{,}160, 0{,}162\}$;
c) Hopf supercrítica: $B = 0{,}025$, $F = 0$ y $A = \{0{,}00426, 0{,}00437, 0{,}0045\}$.
d) Homoclínica: $B = 0{,}025$, $F = 0$ y $A = \{0{,}00429, 0{,}00426, 0{,}00425748, 0{,}00425745\}$

### Mapas como sistema dinámico

12. La evolución temporal de los sistemas dinámicos puede describirse para todo instante (considerando al tiempo como una variable continua) o puede considerarse el estado del sistema sólo en un conjunto discreto de instantes, $t_0, t_1, ..., t_n, ...$. En este caso la evolución se describe en términos de un mapa. Por ejemplo, si $x_n$ describe el estado del sistema en el instante $t_n$, la descripción de la evolución consiste en prescribir el mapa (o función) $f_n$ tal que $x_{n+1} = f_n(x_n)$. Esta forma de describir la evolución se utiliza mucho en el caso de dinámica de poblaciones, donde el significado que se da es el de prescribir el número de individuos de una especie en una dada generación $(n+1)$ como función del número de individuos en la generación anterior $(n)$. Un caso muy estudiado es el del mapa logístico: $x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n)$, donde $0 \leq x_n \leq 1$ y $\mu$ es un parámetro $(0 < \mu \leq 1)$.

    *Para hacer en Matlab*: Analizar el comportamiento de este mapa para $0{,}75 \leq \mu \leq 1$. (para más información, puede consultar el trabajo clásico de Robert May, Nature **261**, p. 459 (1976))