

Guía 4: Probabilidades - Canales

Física de los sistemas biológicos - 2º cuatrimestre 2006

1. *Probabilidades I:*

- a) ¿Cuántos números de 3 cifras puede formar con los dígitos 1,2,3,4 y 5? ¿Cuántos puede formar que no tengan ningún dígito repetido?
- b) Suponga que tiene N objetos distintos. ¿Cuántos conjuntos distintos de m objetos puede formar? Si le resulta más fácil, considere un caso particular, por ejemplo $N = 5$, $m = 3$ y después generalice.
- c) ¿Qué significa la probabilidad condicional?
- d) ¿Qué significa que dos eventos son independientes entre sí?
- e) ¿Qué es una densidad de probabilidad?

2. *Probabilidades II:* Suponga que tira una moneda N veces seguidas y que, en cada intento, la probabilidad de que salga cara es p .

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una secuencia determinada que tiene m caras y $N - m$ cecas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan exactamente m caras (es decir, que salga alguna secuencia con m caras y $N - m$ cecas)? Esta es la distribución binomial.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos m caras?
- d) Si repite el experimento varias veces, ¿cuál es el valor medio del número de caras que espera obtener?
- e) Conteste todas las preguntas anteriores para el caso particular $p = 1/2$ y diga qué significan los resultados obtenidos.
- f) Suponga que $p \ll 1$ y $N \gg 1$ de modo que $pN \approx \alpha$, ¿cómo puede aproximar la probabilidad de que salgan m caras? ¿Qué significado tiene α en términos del valor medio obtenido en el punto *iv*)? Esta aproximación corresponde a la distribución de Poisson.

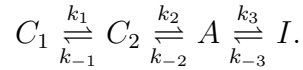
3. *Probabilidades III:* Suponga una variable aleatoria que depende del tiempo, $X(t)$, y que puede tomar dos valores, $x = 0$ y $x = 1$. Esta variable evoluciona en el tiempo de un modo probabilístico. Esto constituye un proceso estocástico. Podemos definir la probabilidad conjunta $P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$ y la probabilidad condicional $P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)$.

- a) Decir qué significa cada una de estas cantidades.
- b) Decir qué significa la aproximación de Markov en términos de la probabilidad condicional.

- c) Suponga que la probabilidad de transición por unidad de tiempo desde el estado con $x = 0$ al estado con $x = 1$ es $1/2s$ y desde el estado con $x = 1$ al estado con $x = 0$ es $2/s$ ($s = \text{segundo}$). Escriba las ecuaciones de evolución para la probabilidad de que la variable tome el valor $x = 0$ ($p_0(t)$) y para la probabilidad de que tome el valor $x = 1$ ($p_1(t)$). ¿Pueden estas probabilidades ser mayores que uno? ¿Por qué la probabilidad de transición por unidad de tiempo puede ser mayor que 1? ¿Cómo se vinculan p_0 y p_1 entre sí en cada instante?
4. Considere una membrana que separa dos medios, 1 y 2, uno en donde una sustancia formada por partículas de carga q se encuentra con concentración c_1 y otro en donde la misma sustancia se encuentra con concentración c_2 . Suponiendo que hay un poro a través del cual la sustancia puede cruzar de un medio a otro y que a través del mismo hay una diferencia de potencial V , encuentre el cociente entre el flujo desde 1 a 2 y el flujo de 2 a 1 como función de V , c_1 y c_2 suponiendo que los flujos son proporcionales a la concentración en la zona desde donde “parten”. Este es el llamado cociente de flujos de Ussing.
5. Suponga un modelo (de barrera) para el flujo de iones a través de un canal iónico de acuerdo al cual el ion se liga al canal antes de salir, el canal tiene dos sitios (1 y 2) donde el ion puede ligarse y sólo puede haber un único ion ligado al canal en cada instante. El ion que llega desde el interior de la célula sólo puede ligarse al sitio 1, desde este sitio, puede ligarse al sitio 2 y desde el sitio 2 puede pasar al exterior. A su vez pueden ocurrir todos los procesos inversos (ir de afuera a 2, de 2 a 1, etc). ¿En cuántos “estados” distintos puede encontrarse el conjunto *canal más ion*? Defina una probabilidad p_i para cada uno de estos estados (la suma de las mismas debe ser igual a 1). Definiendo probabilidades de transición entre estados por unidad de tiempo y suponiendo que las concentraciones del ion en el interior y el exterior son c_i y c_e , escriba las ecuaciones de evolución para las p_i que corresponden a estados del canal con un ion ligado. Considere la solución en el estado estacionario, en donde el flujo de iones que entra al canal en cada instante es igual al que sale. Determine el flujo neto de iones como función de las concentraciones y de las probabilidades de transición. Si en lugar de tener un canal, tiene N_c , ¿cómo escribiría las ecuaciones de evolución para la fracción de canales que, en un dado instante, están en un dado estado?
6. Suponga una membrana con N_c canales idénticos, cada uno de los cuales puede estar abierto con probabilidad p_o (independientemente de qué le pasa a los otros canales). Calcule la probabilidad de que haya exactamente m canales abiertos en un dado instante. Si la conductancia de cada canal es γ , calcule el valor medio de la conductancia de la membrana, $\langle G \rangle$, y su varianza, $\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$.
7. Suponga que tiene una membrana con N_c canales idénticos, cada uno de los cuales puede estar en dos estados. Suponga que cada canal pasa de un estado a otro cuando una partícula de carga q pasa de una posición con coordenada x_1 a otra con coordenada x_2 , donde x se mide a lo largo del canal (es decir, en una dirección transversal a la membrana). Llamando ϵ_1 a la energía de la configuración con la partícula en x_1 y ϵ_2 con la partícula en x_2 , use la distribución de Boltzmann para determinar el cociente entre el número de canales en una y otra configuración. Suponga que somete a la membrana a una diferencia de potencial V , diga cómo se modifica este cociente. Suponga que el estado 2 corresponde al canal abierto

y el 1 al cerrado, diga qué puede suceder con la corriente a través de la membrana cuando varía V . Este es un modelo muy simplificado de un canal que se abre por voltaje.

8. Considere un canal que puede estar en cuatro estados posibles C_1 , C_2 , A e I , y que puede cambiar de estado de acuerdo al siguiente esquema:



El canal sólo permite el paso de iones cuando está en el estado A (estado abierto). Escriba las ecuaciones de evolución para la probabilidad de que el canal esté en un dado estado. Suponga que tiene N_c canales en una membrana y que la corriente que circula por un canal abierto es i . Escriba la corriente total a través de la membrana en un instante arbitrario. ¿Cuánto vale en el caso estacionario (hacia el que tiende la solución para $t \rightarrow \infty$)?

9. *Repaso:* La corriente eléctrica se define como la cantidad de carga que atraviesa una superficie, A , por unidad de tiempo. Considere un cilindro de radio a por el que circula una densidad de corriente $\mathbf{j}$, uniforme, en la dirección del eje principal del cilindro. ¿Cuánto vale la corriente que atraviesa la sección transversal a dicho eje? ¿Cómo debería hacer el cálculo si en lugar de tomar una sección transversal, tomara una superficie cuya normal forma un ángulo α con el eje del cilindro?
10. *Repaso:*
- Considere un capacitor plano-paralelo de área A cuyas placas están separadas por una distancia d . ¿Cuál es su capacidad? ¿Cómo se vincula la carga en cada placa conductora con la diferencia de potencial entre placas?
 - Considere un capacitor de capacidad C conectado a un cable por el que circula una corriente I . Diga cómo varía la carga, Q , en el capacitor como función de I . Discuta la relación entre el signo de I y el de dQ/dt .
11. Considere una célula cuya membrana actúa como un capacitor de capacidad C . Suponga que hay un canal con conductancia $g(V)$ en la membrana tal que la corriente que lo atraviesa puede escribirse como $I = g(V)(V - V_0)$, donde V es el potencial de membrana. Escriba una ecuación de evolución para V (es decir, la ecuación $dV/dt = \dots$).
12. Considere el sistema del problema anterior pero con N_c canales en lugar de uno. Suponga además que cada canal puede estar en dos estados: uno abierto, con conductancia $g(V)$ como en el problema anterior, y otro cerrado, con conductancia cero, y que el canal puede cambiar de un estado a otro con una probabilidad de transición que depende de V . ¿Alcanza una sola ecuación de evolución para determinar $V(t)$? Escriba la o las ecuaciones dinámicas a partir de las cuales podría determinarse $V(t)$.