COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2021

Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese y Matias Leizerovich
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 0: Introducción

Repaso de Relatividad Especial

1. Un modelo simple de un reloj consiste en un pulso de luz que se refleja continuamente entre dos espejos planos paralelos entre sí y separados por una distancia propia L. Las reflexiones sucesivas de la luz en uno de los espejos corresponden a los eventos que definen los intervalos de tiempo propio $\Delta\tau$ a lo largo de la línea de universo del reloj. Ilustre el fenómemo de dilatación del tiempo, resolviendo el problema desde el punto de vista de un observador que se mueve en una dirección paralela a los espejos.

2. Mostrar que la conservación del cuadrimomento P^α prohibe la reacción en la cual un electrón y un positrón se aniquilan y producen un fotón. ¿Es posible que se produzcan dos fotones?

3. Un fotón de frecuencia ν choca con un electrón inicialmente en reposo (scattering Compton). Suponga que el fotón se desvía un ángulo θ respecto de la trayectoria original. ¿Cuál es la frecuencia final del fotón?

4. Desde un cohete que se aleja de la tierra a velocidad de módulo v se emiten pulsos de luz con un período fijo τ'. ¿Cuál es el tiempo que transcurre en la tierra entre el arribo de dos pulsos sucesivos?, ¿qué sucede si la nave se acerca a la tierra en lugar de alejarse?

5. La acción libre de una partícula de masa m es

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = -mc \int \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}} dt = \int L\, dt, \tag{1}$$

con $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, $x^\alpha = (ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z)$ y $\vec{v} = d\vec{x}/dt$.

   (a) Compare con la acción clásica no relativista mediante una expansión del Lagragiano L para $v/c \ll 1$.

   (b) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Muestre que en este caso $d\vec{\mathbf{p}}/dt = 0$ con $\vec{p} = \partial L/\partial \vec{v}$.

Geometría, mapas y coordenadas curvilíneas

6. Calcular el área de un círculo de radio r (distancia al centro de la circunferencia) en la geometría bidimensional de una esfera de radio a. Mostrar que el área tiende a πr^2 cuando $r \ll a$.

7. Para hacer mapas planos de la superficie terrestre se hacen cambios de coordenadas de la forma $x = x(\theta, \phi) \quad y = y(\theta, \phi)$, donde θ y ϕ son la latitud y longitud de un punto sobre la superficie terrestre y (x, y) las coordenadas sobre el mapa. Suponga que $x = L\phi/2\pi$, donde L es el ancho del mapa.

(a) Encontrar la transformación de coordenadas $y(\theta)$ tal que las áreas en el mapa sean proporcionales a las áreas reales.

(b) Idem tal que el mapa preserve los ångulos (esta es la muy utilizada proyección de Mercator).

(c) Calcular la distancia física entre dos puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x_0, y_1).

(d) Mostrar que la proyección de Mercator no preserva las áreas.

(e) Para la proyección de Mercator exprese el elemento de línea $d\ell^2$ en las coordenadas rectangulares, y obtenga por métodos variacionales la curva sobre el mapa que minimiza la distancia entre dos puntos ubicados sobre un mismo paralelo.

Ayuda: ver páginas 24-26 del libro de J.B. Hartle, Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity

Radiación de cuerpo negro

8. Por algún motivo en el último año y medio fue (y es) importante (y claramente no suficiente) medir la temperatura de muchas personas rápidamente, por ejemplo en aeropuertos. Los termómetros convencionales que funcionan por contacto y equilibrio térmico no permiten la agilidad y rapidez que se necesita. No obstante puede realizarse una medición rápida y masiva captando la radiación que emite cada persona a través de sensores electromagnéticos. Asumiendo que una persona puede aproximarse por un cuerpo negro, y tiene una superficie de 1.5 m^2 y temperatura de 310 K.

   (a) Elija algún criterio que considere razonable y encuentre la longitud de onda característica del espectro de esa persona, ¿cuál es la tasa a la que radía energía?. ¿Cuál es la energía media de los fotones emitidos (exprese el resultado en eV)?

   (b) Determine una estimación aproximada para la resolución del espectrómetro si se desea diferenciar a la persona mencionada de un caso sospechoso de ...?

9. Una estrella similar al Sol eventualmente evolucionará en una "gigante roja" y luego en una "enana blanca". Una enana blanca típica tiene aproximadamente el tamaño de la Tierra, y su superficie tiene una temperatura aproximada de 2.5×10^4 K. Una gigante roja tiene una temperatura superficial de 3×10^3 K y un radio 100000 veces más grande que el de una enana blanca. ¿Cuál es la potencia media por unidad de área, y la potencia total emitida por cada una de estas estrellas?, ¿cómo se comparan?

10. Una observadora O' se mueve con una velocidad de módulo V respecto de una observadora O. Ambas observan la emisión de radiación de un cuerpo negro caracterizada por una función de distribución Planckiana $f_{\rm PL}$. La cantidad de fotones en un diferencial de volumen de espacio de fases se lee $dN = g_\gamma f_{\rm PL}(x^i, p_i, t)\, d^3x\, d^3p/(2\pi)^3\hbar^3$, con $g_\gamma = 2$ el número de grados de libertad internos (en este caso, las polarizaciones del fotón), también llamado degeneración. Dicho elemento de volumen del espacio de fases es invariante ante transformaciones de coordenadas. Asuma que no hay interacciones y que en efecto la cantidad dN en un volumen $d^3x\, d^3p$ no cambia.

    Muestre que si O ve un espectro de cuerpo negro con temperatura T, la observadora O' verá también un espectro de cuerpo negro pero con una temperatura

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 + V\cos\theta'/c)} \tag{2}$$

donde θ' es el ángulo con el que recibe la radiación respecto de su dirección de movimiento y $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

La radiación cósmica de fondo (RCF) tiene un espectro de cuerpo negro y puede ser observada tanto desde telescopios en la Tierra (SPT, QUBIC, BICEP, etc.) como desde satélites (COBE, WMAP, Planck). Preguntas para pensar: ¿podemos asegurar que el instrumento de medición está en reposo respecto a la RCF?, ¿puedo medir la velocidad de la Tierra (o del satélite) respecto a la RCF?, ¿cómo defino finalmente la temperatura de la RCF?. No es necesario que responda ahora, sobre el final de la materia discutiremos algunas respuestas a estas preguntas.

Estrellas, galaxias y expansión

11. La fotósfera de estrellas típicas tiene una temperatura de 6000 K. Esta energía térmica hará que los átomos de aquellos elementos que la componen posean movimientos erráticos y por ende que sus emisiones características sufran el llamado ensanchamiento de las líneas espectrales (debido al efecto Doppler-Fizeau). Si ahora consideramos una estrella ubicada en uno de los brazos de nuestra galaxia, el corrimiento de su espectro podría darnos una estimación de la magnitud de la rotación de la galaxia.

    (a) Teniendo en cuenta el ensanchamiento mencionado más arriba ¿qué condición debe darse para que así sea? Estime dicho ensanchamiento para la emisión del Ca II cuya longitud de onda en el laboratorio es $\lambda = 3969$ Å.

    (b) En el espectro de una estrella, la línea de Ca II nos llega modificada como resultado de la rotación galáctica. Se espera que esta línea sufra corrimientos hacia el rojo o hacia el azul de magnitud del orden de 10^{-3} correspondientes a variaciones de 4 Å en λ. ¿Es este valor mayor o menor al obtenido más arriba?

    (c) En este escenario, ¿es necesario incorporar el corrimiento en frecuencias debido a la expansión del universo?, ¿por qué?

12. (a) Una galaxia típica contiene unas 10^{11} estrellas y tiene un tamaño aproximado de 30 kpc. Suponiéndola esférica y compuesta exclusivamente de estrellas similares al Sol, calcule la velocidad de escape (de una estrella) de esta galaxia.

    (b) Considere un modelo cosmológico newtoniano, en el que una distribución esférica homogénea de materia de densidad ρ y de radio R se expande con velocidad $v = H_0 R$. Muestre que una partícula masiva en la superficie de esa distribución de materia podrá escapar a la atracción gravitatoria ejercida por la materia en el interior de la esfera sólo si la densidad ρ es menor que un valor crítico $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$. ¿Cuál es el valor de ρ_c si $H_0 = 100$ km/(seg Mpc)?

    (c) Los átomos, la Tierra, el Sol y la Galaxia no se expanden según la expansión general de nuestro Universo detectada por primera vez por Hubble, ya que constituyen sistemas ligados por fuerzas eléctricas o gravitatorias (recuérdenos discutir esta afirmación cuando estudiemos energía oscura). Compare la velocidad de escape con la velocidad de recesión a través del cociente ρ/ρ_c del inciso anterior para los siguientes casos: nuestra galaxia, un cúmulo (cluster) de galaxias típico y un grupo de cúmulos (supercluster). ¿Qué concluye?

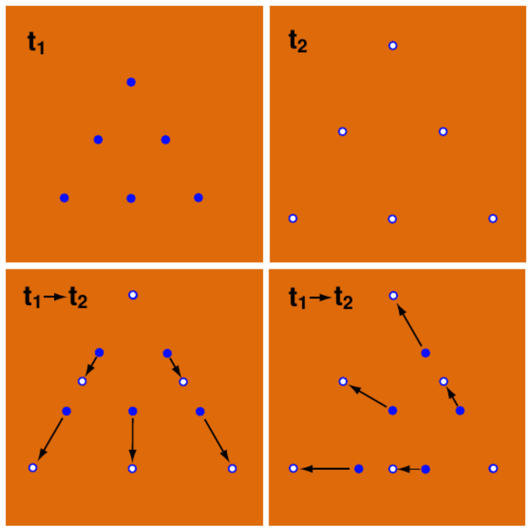
13. Considere las dos afirmaciones siguientes

    (a) Isotropía alrededor de todo punto implica homogeneidad

    (b) Homogeneidad en todo punto implica isotropía

    ¿Son verdaderas? Discuta y dé ejemplos que ilustren sus respuestas.

14. Considere la siguiente figura que representa una distribución de galaxias a dos tiempos cosmológicos distintos [t_1 (t_2) $\rightarrow$ galaxias negras (blancas)]. Vea si puede discutir sobre dos de los grandes pilares de la cosmología moderna: el principio cosmológico y la ley de expansión de Hubble.



    (a) ¿Qué sucede si hace pasar *la película* en el sentido inverso? ¿Se llegará a algún punto singular?

    (b) Vuelva a mirar la figura y discuta, ¿todos los puntos son el centro o ninguno lo es?