COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2021

Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese y Matias Leizerovich
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 1: Relatividad General y Mecánica Estadística

Elementos de Relatividad General: corrimiento al rojo gravitatorio y geodésicas

1. La acción de la partícula relativista libre de masa m puede escribirse como

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}dt \tag{1}$$

   a) Reemplace $g_{00} = -(1 + 2\,\phi c^{-2})$ en esta acción (con $|\phi|\, c^{-2} \ll 1$) y muestre que resulta la acción de una partícula clásica en un potencial gravitatorio ϕ cuando la velocidad de la partícula es mucho menor que c.

   b) Use la ecuación (1) para determinar cuánto atrasa un reloj en la base del Obelisco respecto de otro idéntico ubicado en el extremo superior.

2. La edad de la Tierra es de aproximadamente 5000 millones de años. Estime la diferencia de edad entre rocas en el centro de la Tierra y rocas en la superficie, producidas por el corrimiento al rojo gravitacional. Suponga que en el momento de formación de la Tierra existieron cantidades iguales de cierto material radioactivo (de vida media 4000 millones de años) en el centro y en la superficie. ¿Cuánto más material habrá hoy en el centro? (suponga que la densidad de la Tierra es constante).

3. Utilice el siguiente Lagrangiano

$$\tilde{L} = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}, \tag{2}$$

   y obtenga la ecuación geodésica con parámetro λ a partir de las ecuaciones de Euler–Lagrange. La relación entre λ (conocido como parámetro afín) y el elemento de línea depende del tipo de geodésica a estudiar. En efecto

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \begin{cases} -(mc)^2 & \text{geodésicas tipo tiempo (trayectorias de partículas masivas)} \\ 0 & \text{geodésicas nulas (trayectorias de luz)} \\ > 0 & \text{geodésicas tipo espacio (distancias espaciales)} \end{cases} . \tag{3}$$

4. *a*) El elemento de línea del espacio–tiempo de Friedmann–Lematire–Robertson–Walker (FLRW) en coordenadas esféricas para una geometría espacial cerrada ($K = 1$), plana ($K = 0$) o hiperbólica ($K = -1$) es

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] . \tag{4}$$

   Encuentre los símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ correspondientes a este caso a partir del siguiente procedimiento. Derive la ecuación geodésica como en el problema anterior (partiendo de $\tilde{L}$ para esta métrica particular) y luego compare con la fórmula general de la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{5}$$

para hallar las expresiones de $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$.

b) La métrica de FLRW espacialmente plana en coordenadas cartesianas se define a partir de

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] . \tag{6}$$

Encuentre los símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ en este caso a partir de su expresión en términos de la métrica.

5. Muestre que si una geodésica temporal de la métrica plana FLRW en coordenadas cartesianas tiene una velocidad $\vec{v_1}$ en un instante t_1 respecto del sistema de coordenadas comóviles (lo cual se denomina velocidad peculiar), tendrá una velocidad $\vec{v_2}$ en el instante t_2 tal que

$$\gamma_1 v_1^i a_1^2 = \gamma_2 v_2^i a_2^2 \,, \tag{7}$$

y así

$$\gamma_1|\vec{v}_1|a_1 = \gamma_2|\vec{v}_2|a_2 \,, \tag{8}$$

donde $a_s = a(t_s)$, $\gamma_s = (1 - |\vec{v_s}|^2/c^2)^{-1/2}$ $(s = 1, 2)$ y $|\vec{v_s}|^2 = g_{ij}v_s^i v_s^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

a) En vistas de las relaciones (7)-(8), ¿qué puede decir sobre la relevancia de las velocidades peculiares conforme se expande el universo?

b) Muestre que en el límite $|\vec{v}_{1,2}| \to c$ la ecuación (8) representa la fórmula del corrimiento al rojo cosmológico para un fotón.

¿Unidades iguales a 1?

6. Como veremos a lo largo de la materia, es muy cómodo utilizar un sistema de unidades en el que $\hbar = c = k_B = 1$. Si bien en un principio parece extraño, debe convencerse de que en este sistema cualquier cantidad con unidades físicas puede expresarse explícitamente reestableciendo los factores de $\hbar$, c y k_B correspondientes a partir de análisis dimensional. En efecto, realice las siguientes conversiones:

a) $T_0 = 2{,}726$ K $\to$ eV

b) $\rho_\gamma = \pi^2 T_0^4/15 \to$ eV^4, g cm^{-3}

c) $1/H_0 \to$ cm, s

d) $m_{\rm pl} = \sqrt{\hbar c/G} = 1{,}2 \times 10^{19}$ GeV $\to$ K, cm^{-1}, s^{-1}

Note que debe expresar ciertas cantidades en diferentes unidades que en principio parecen incompatibles, en cada caso puede diferir qué factor se reestablece explícitamente y cuál sigue valiendo 1.

Equilibrio termodinámico, mecánica estadística y modelos de radiación y materia

7. Un poco de termodinámica. Un poco de equilibrio. Para alcanzar el equilibrio termodinámico en un sistema es necesario que todas sus variables intensivas se encuentren equilibradas, por ejemplo la temperatura (eq. térmico), la presión (eq. mecánico) y el potencial químico (eq. químico). Dada la siguiente reacción (no necesariamente química) $A + B \leftrightarrow C + D$ a temperatura y presión constantes, muestre que para alcanzar el equilibrio termodinámico los potenciales químicos de las respectivas especies deben cumplir $\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$. ¿Qué sucedería si la reacción en cuestión fuera $e^- + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma$?

   Ayuda. En equilibrio químico no hay variación de la energía libre de Gibbs, $dG = 0$. Recuerde que como la relación es de equilibrio las concentraciones de las especies no son independientes.

8. Un poco de mecánica estadística. Cuando una reacción logró alcanzar el equilibrio termodinámico, el número de partículas ocupando un estado microscópico (cuántico) con momento $\boldsymbol{p}$ está dado por la función de distribución de equilibrio local (o de máxima entropía)

$$f(\boldsymbol{p}) = \left[\exp\left(\frac{E(\boldsymbol{p}) - \mu}{k_B T}\right) \pm 1\right]^{-1} . \tag{9}$$

   Aquí el $+$ es para un gas de fermiones con la distribución de Fermi-Dirac y el $-$ corresponde a un gas de bosones con la distribución de Bose-Einstein. $E(\boldsymbol{p})$ es la energía de una partícula con momento $\boldsymbol{p}$, T la temperatura y μ el potencial químico.

   La densidad numérica n, la densidad de energía ρ y la presión p se obtienen al realizar las siguientes integrales en el espacio de las fases

$$n = g \int f(\boldsymbol{p}) \, \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3} \, , \tag{10}$$

$$\rho = g \int E(\boldsymbol{p}) \, f(\boldsymbol{p}) \, \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3} \quad \text{y} \tag{11}$$

$$p = \frac{g}{3} \int \frac{p^2}{E(\boldsymbol{p})} \, f(\boldsymbol{p}) \, \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3} \, , \tag{12}$$

   donde g es el número de grados de libertad internos o degeneración.

   a) Las variables intensivas T y μ están vinculadas con ciertas cantidades macroscópicas conservadas, ¿cuáles son?

   b) De aquí en adelante, para todo este ejercicio, asuma que $\mu/k_B T$ es una cantidad despreciable. Sabiendo que $k_B T$ es del orden de la energía media por partícula y que $E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$, tome el límite relativista calcule n y ρ a partir de (10) y (11) tanto para fermiones como para bosones. ¿Qué relación encuentra entre ρ_b y ρ_f?

   c) Ahora tome el límite no relativista y vuelva a calcular la densidad numérica y la densidad de energía. ¿Encuentra la misma dependencia que en el caso relativista?, ¿qué puede concluir?

   d) Encuentre la relación entre la presión (12) y la densidad de energía (11) tanto para el límite ultra-relativista como para el no relativista.

e) Usualmente llamamos ecuación de estado a la relación entre p y ρ. Verifique que la ecuación de estado fenomenológica $p/\rho = w$ con $w = 1/3$ y $w \simeq 0$ coincide con lo obtenido en el punto ($8d$) para el límite ultra-relativista y para el no relativista respectivamente.

f) Calcule la entropía para un gas ultra-relativista fermiónico o bosónico.

9. En el punto anterior asumimos que el potencial químico es despreciable. Una aproximación más sensata habría sido retener la dependencia con μ/k_BT y luego tomar el límite $\mu/k_BT \ll 1$ en caso de ser necesario. En un gas relativista de partículas, antipartículas y radiación, asumamos por concretitud electrones, positrones y fotones equilibrados mediante $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$. ¿Cómo calcularía el potencial químico de los electrones?

   Ayuda. Estudie el cociente entre la diferencia entre las densidades numéricas de partículas y antipartículas, y la densidad numérica de los fotones. Recuerde las relaciones entre los potenciales químicos en una reacción en equilibrio (ver Physical Foundations of Cosmology, V. Mukhanov, Cambridge University, 2005).

10. Considere una colección de N partículas de igual masa m que se mueven con una velocidad de módulo v y cuya dirección $\hat{n}_A$ es una variable aleatoria con una distribución isótropa. La dirección $\hat{n}_A$ ($A = 1, 2, \cdots, N$) es un vector unitario espacial medido en el referencial de laboratorio.

   a) Mostrar que la velocidad de la cadrivelocidad u^μ_A de la partícula A-ésima es $u^\mu_A = \gamma(1, v\hat{n}_A)$.

   b) El tensor de energía-momento de la partícula A-ésima es $T^{\mu\nu}_A = (m/\gamma)u^\mu_A u^\nu_A \delta(x - x_A)$, mientras que el tensor de energía-momento de la colección de partículas es la suma

$$T^{\mu\nu} = \sum_{A=1}^{N} T^{\mu\nu}_A \,. \tag{13}$$

   La idea es obtener una expresión para $T^{\mu\nu}$ promediando sobre una esfera de volumen espacial V que contenga todas las partículas. En efecto, argumente que si N es muy grande entonces la suma sobre partículas puede ser reemplazada por un promedio sobre las direcciones de modo que $\sum_{A=1}^{N} \to (N/4\pi)\int d\Omega$, con $d\Omega$ el diferencial de ángulo sólido. Use las propiedades

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi}\hat{n}_i = 0\,; \quad \int \frac{d\Omega}{4\pi}\hat{n}_i\hat{n}_j = \frac{1}{3}\delta_{ij}\,, \tag{14}$$

   con $\hat{n}$ un vector unitario, i, j las direcciones espaciales x, y, z (no confundir con la etiqueta A que indicaba cada partícula) y δ_{ij} la delta de Kronecker, y muestre que $T^{\mu\nu}$ puede escribirse como el de un fluido perfecto según $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}p$. ¿Qué es u^μ? ¿y cuáles son las funciones p y ρ como función de m y v?, ¿coinciden con las expresiones de los ejercicios anteriores?

   c) ¿Cuál es el valor de p/ρ si las partículas son fotones, i.e. $v = 1$ y $m\gamma = \hbar\omega$?, ¿recupera lo esperado?