COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2021

Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese y Matias Leizerovich
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 10: Anisotropías en la radiación cósmica de fondo

Anisotropías en la temperatura de la RCF

1. **Efectos cinemáticos.**

   Recuerde el siguiente resultado que obtuvo en la guía de repaso. Si una observadora O ve un espectro de cuerpo negro a temperatura T, la observadora O' verá una temperatura

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 + V\cos\theta'/c)} \tag{1}$$

   donde θ' es el ángulo respecto de su dirección de movimiento del cual recibe la radiación, $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ y V es la velocidad relativa entre observadoras.

   (a) A partir del resultado anterior podríamos preguntarnos qué espectro de fluctuaciones se observaría desde la Tierra aún cuando la RCF fuera exactamente homogénea e isótropa. En consecuencia concluiríamos que existen al menos dos contribuciones a las fluctuaciones: las cinemáticas y las intrínsecas. ¿A qué se debe cada una?

   (b) Usando la ecuación (1) deduzca las amplitudes del dipolo y del cuadrupolo cinemáticos, ¿cuál es el monopolo?. Definiendo la anisotropía adimensional como $\Theta \equiv \Delta T/T \equiv (T' - T)/T$, ¿cuál es el valor del monopolo (por definición) y de los dos siguientes multipolos de Θ?

   Ayuda. Tome algún desarrollo de la ecuación (1), interprete y justifique cada término de la serie como monopolar, dipolar, cuadrupolar, etc.

   (c) Sabiendo que la amplitud medida del dipolo de la radiación de fondo es $\Theta_{\rm dip} \sim 1.24\times10^{-3}$ y que el cuadrupolo intrínseco (i.e., no cinemático) es del orden de 10^{-5} ¿Es posible asegurar que el cuadrupolo cinemático es despreciable?

2. **Definición de los C_l's.** Para describir las perturbaciones en la temperatura de la RCF es útil transformar la dependencia con la dirección de arribo de los fotones $\hat{n}$ en una descomposición en armónicos esféricos, $Y_{lm}(\hat{n})$, según

$$\frac{\delta T}{T_0}(\vec{x}_0, \hat{n}, \eta_0) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(\vec{x}_0, \eta_0) Y_{lm}(\hat{n}). \tag{2}$$

La cantidad $\vec{x}_0$ significa que observamos los fotones aquí en la Tierra (o en un satélite) y η_0 hoy (tiempo conforme). Lo que se puede medir es la cantidad $a_{lm}(\vec{x}_0, \eta_0)$. Sin embargo solo sus propiedades estadísticas son de interés cosmológico, por ejemplo, los promedios $\langle \ldots \rangle$ sobre el lugar de observación $\vec{x}_0$ o sobre repetidas realizaciones de la trayectoria de los fotones. En este caso la correlación sería

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'} C_l. \tag{3}$$

Ninguno de estos promedios son posibles de hacer hoy (viernes). De modo que la única información estadística a la cual podemos acceder gracias a la invariancia ante rotaciones, es el promedio sobre las proyecciones m, a saber

$$\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(\vec{x}_0,\eta_0)\, a^*_{l'm'}(\vec{x}_0,\eta_0) = C_l^{obs}. \tag{4}$$

(a) Calcule la diferencia relativa cuadrática media entre C_l^{obs} y C_l teniendo en cuenta que la distribución de probabilidad es gaussiana.

(b) La varianza calculada en 2a es lo que se denomina varianza cósmica e introduce una fuente de incerteza intrínseca a la hora de estimar los C_l's. ¿Cuál es su dependencia respecto del momento multipolar l?

3. **El efecto Sachs-Wolfe.** Las fluctuaciones en la temperatura para escalas grandes, $k\,\eta_{rec} \ll 1$, están dominadas por el efecto Sachs-Wolfe según

$$\frac{\delta T(\vec{x}_0,\hat{n},\eta_0)}{T_0} = \frac{1}{3c^2}\delta\phi\left(r_L\,\hat{n},\eta_{rec}\right). \tag{5}$$

En este mismo régimen la correlación para las fluctuaciones del potencial gravitatorio, en el tiempo de recombinación, corresponde con el espectro de fluctuaciones iniciales. En consecuencia el espectro, invariante ante rotaciones y traslaciones, sigue una ley de potencias tal que

$$\left\langle \delta\phi(\vec{q},\eta_{rec})\,\delta\phi(\vec{q}\,',\eta_{rec})\right\rangle = \delta(\vec{q}+\vec{q}\,')\,N_\phi^2\,q^{n_s-4}. \tag{6}$$

(a) Calcule los C_l's. ¿Cuál es la dependencia con r_L, n_s y N_ϕ?

Ayuda. Puede ser útil la relación $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_l (2l+1) i^l\, P_l(\hat{q}\cdot\hat{n})\, j_l(qr)$, con $j_l(qr)$ las funciones esféricas de Bessel.

(b) Considerando un espectro de Harrison-Zel'dovich, $n_s = 1$, muestre que $l(l+1)C_l$ no depende ni de r_L ni de l.

(c) Este comportamiento sólo es relevante a escalas grandes (multipolos pequeños), ¿por qué?. Estime cuál es el rango de multipolos correspondiente a dichas escalas.

4. **Oscilaciones acústicas de bariones.** En un universo con materia oscura, bariones y radiación, las perturbaciones iniciales crean desbalances gravitatorios en la materia y de presión en el fluido de bariones y fotones. Como consecuencia, en escalas pequeñas dentro del horizonte, aparecen ondas de sonido. Pensemos en una onda de sonido esférica que es creada en una región sobredensa del universo muy temprano ($t \approx 0$). Esta onda se propagará hasta el momento del último scattering en el cual la presión es liberada, la velocidad del sonido esencialmente decae a cero, y la onda queda congelada en una esfera a una distancia fija s_*. Estas ondas son las oscilaciones acústicas de bariones. De aquí podemos obtener dos efectos observables. El primero es que parte de la perturbación en los bariones que se encontraba al comienzo junto con la perturbación inicial de materia oscura se desplazó a la cáscara de una esfera con radio s_*. De modo que al final obtendremos una pertubación en la densidad de bariones justo en una cáscara esférica de radio s_* alrededor de la perturbación inicial. El segundo está relacionado con máximos en la perturbación de la temperatura de los fotones de la radiación cósmica de fondo cuya longitud de correlación es s_*.

Obviamente, este es el caso para una perturbación en un punto particular. No obstante, las perturbaciones iniciales excitan ondas esféricas en todos los puntos con una cierta distribución estadística.

Las ecuaciones gravitatorias y de Boltzmann, en el límite hidrodinámico y de acoplamiento fuerte, permiten describir la dinámica de los fotones considerando solo los multipolos más bajos (monopolo Θ_0 y dipolo Θ_1). A su vez esta dinámica puede reducirse a una única ecuación para el monopolo de la distribución de fotones, $\Theta_0 = (\delta T/T)_0$. A saber

$$\Theta_0''(k,\eta) + \frac{a'}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_0'(k,\eta) + k^2 c_s^2 \Theta_0(k,\eta) = F_{\rm grav}, \tag{7}$$

con $c_s^2 = dP_{{\rm b}\,\gamma}/d\rho_{{\rm b}\,\gamma}$ la velocidad del sonido en el plasma de bariones y fotones, k el momento comóvil, $R = 3\rho_{\rm b}/4\rho_\gamma$, $F_{\rm grav}$ un forzado que depende de las pertubaciones de los potenciales gravitatorios y $f' = df/d\eta$ con η el tiempo conforme. Esta ecuación muestra la dinámica del plasma de fotones y bariones (lado izquierdo) acoplada a las perturbaciones gravitatorias dominadas por la materia oscura (lado derecho).

(a) Exprese la velocidad del sonido c_s en términos de R.

(b) Obtenga una ecuación más simple en el límite de pequeñas escalas y despreciando el término de forzado debido a los efectos gravitatorios F_{grav}.

(c) Halle la solución a dicha ecuación considerando condiciones iniciales $\Theta_0 = \Theta_0(0)$ tales que para tiempos tempranos (o escalas grandes) las perturbaciones se mantengan constantes. Considere que la velocidad del sonido varía lentamente respecto del período de oscilación (aproximación adiabática o WKB).

(d) ¿Cuál es el comportamiento para escalas fuera y dentro del horizonte de sonido?

(e) Utilizando 4c, estime las posiciones de los "picos" del espectro de la correlación de temperatura de la RCF $\Delta_{\rm TT}(l)$, es decir, las posiciones angulares y multipolares de los máximos de $\langle (\delta T/T_0)^2 \rangle \sim \Theta_0^2$.

(f) Muestre/argumente que la posición del primer pico depende fuertemente de la curvatura espacial del universo. Compare posición angular y multipolar de dicho pico halladas en 4e con los resultados de *Planck 2018, results. VI. Cosmological parameters*, arXiv:1807.06209v1 [astro-ph.CO]

5. **Amortiguamiento de las fluctuaciones.** Para lograr un desarrollo completo de las fluctuaciones de la RCF es importante incorporar efectos disipativos. Existen al menos dos efectos que contribuyen a la disipación, y por ende a la reducción de la amplitud de las perturbaciones. El primero, denominado *Silk damping*, proviene de que los fotones poseen un camino libre medio finito aún en el régimen de acoplamiento fuerte del plasma de bariones y fotones. En consecuencia, en escalas menores a la longitud de difusión, los fotones se encuentran desacoplados de los bariones y las fluctuaciones en la temperatura están dominadas por el efecto difusivo. El segundo, denominado *Landau damping*, está vinculado con que el fenómeno de último scattering de los fotones no es instantáneo sino que es un proceso que sucede en un intervalo finito de tiempo generando una *cáscara gruesa* de último scattering. Si consideramos escalas que son menores que el grosor de esa cáscara entonces varios máximos y mínimo de temperatura se ubicarán en la línea de visión. Por ello las fluctuaciones en esas pequeñas escalas están fuertemente promediadas. El grosor de esta cáscara de último scattering es del orden de la longitud de difusión de los fotones. De este modo ambos efectos son relevantes en las mismas escalas.

Para describir el primer efecto es necesario incorporar el término cuadrupolar Θ_2 en las ecuaciones dinámicas. Este nuevo término es una corrección de orden $1/\tau'$[1], con $\tau' = -x_e n_e \sigma_T a$ la tasa de scattering de Thomson. Si consideramos escalas pequeñas podemos despreciar los efectos gravitatorios y el sistema de ecuaciones puede reducirse a

$$\Theta_0'' - \frac{k^2 c_s^2}{\tau'}\left(\frac{4}{5} + \frac{R^2}{1+R}\right)\Theta_0' + k^2 c_s^2 \Theta_0 = 0. \tag{8}$$

(El factor 4/5 cambia a 16/15 si tenemos en cuenta la polarización.)

(a) Utilizando (8), halle la dependencia temporal de Θ_0 a primer orden en $1/\tau'$ y muestre que corresponde a una oscilación amortiguada exponencialmente.

(b) Encuentre una expresión para la escala característica de difusión $\lambda_D(\eta)$ válida hasta el tiempo de recombinación $\eta = \eta_{\rm rec}$.

(c) Grafique $\lambda_D(\eta)$ y estime la escala multipolar característica l_D final (para el tiempo de recombinación) en la aproximación más simple que se le ocurra.

(d) Un argumento heurístico pero más simple para determinar esta escala $\lambda_D(\eta)$ es pensar en que los fotones hacen una caminata al azar entre los electrones de a pasos $\lambda_{\rm CLM} = -1/\tau'$. La escala $\lambda_D(\eta)$ será la distancia media recorrida por un fotón en un tiempo η. En este esquema, ¿podría estimar $\lambda_D(\eta)$?, ¿recupera la misma dependencia que en 5b?

Ayuda. Piense cómo se relaciona $\lambda_D(\eta)$ y $\lambda_{\rm CLM}$ en función del número de colisiones para una caminata al azar.

6. **Propagación libre.** La ecuación de Boltzmann para los modos de Fourier de las fluctuaciones en la temperatura de los fotones $\Theta(\vec{k}, \hat{n}, \eta) \equiv \Delta T/T$ puede escribirse como

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta = \tau'\Theta + S \tag{9}$$

donde $\mu = \hat{k}\cdot\hat{n} = \cos\theta$, siendo θ el ángulo entre el vector de onda $\vec{k}$ y la dirección de propagación $\hat{n}$, y S es el término de fuente que depende de las fluctuaciones en los potenciales gravitatorios. Las derivadas son respecto al tiempo conforme $d\eta = c\,dt/a(t)$, y $\tau' = -x_{\rm e} n_{\rm e} \sigma_{\rm T} a$ es la tasa de scattering de Thomson ($x_{\rm e}$ es la fracción de electrones libres).

(a) Suponga que desde el tiempo de desacople los fotones se propagan libremente y halle el espectro multipolar de las fluctuaciones en temperatura hoy, $\Theta_l(k, \eta_0)$ a partir de la ecuación (9) como función de las fluctuaciones evaluadas en el tiempo de desacople $\Theta_l(k, \eta_*)$. Recuerde que en la aproximación de acoplamiento fuerte (antes del desacople) puede considerar que los términos relevantes son el monopolar y el dipolar.

(b) ¿Cuáles son las escalas (en longitud de onda o en número de onda) que contribuyen predominantemente a cada multipolo l hoy? ¿Es lo que esperaba por argumentos geométricos?

Ayuda. Tome la solución $\Theta_l(k, \eta_0)$ hallada en 6a y estudie la relación entre k y l solamente para el término que depende de $\Theta_0(k, \eta_*)$.

7. **Reionización.** Para estudiar los cambios en las fluctuaciones debidos al proceso de reionización utilizamos nuevamente la ecuación (9), pero ahora sólo despreciando el término de fuente S.

[1] En el límite de acoplamiento fuerte es posible despreciar este término cuadrupolar (como se hizo en 4), pero es sólo una aproximación.

(a) Demostrar que la reionización del Universo provoca una reducción de los momentos multipolares Θ_l por un factor $e^{-\tau_{\rm rei}}$, donde $\tau_{\rm rei} = \int_{\eta_{\rm rei}}^{\eta_0} x_e n_e \sigma_T a\, d\eta = -\int_{\eta_{\rm rei}}^{\eta_0} \tau'(\eta)\, d\eta$ es la profundidad óptica debida a la reionización. Básicamente la reionización ayuda a reducir las fluctuaciones y reestablecer la isotropía. ¿Este efecto actúa en todas las escalas multipolares? Si no es así, ¿en cuáles?.

(b) Investigue cuáles son las estimaciones actuales para el parámetro $\tau_{\rm rei}$. Calcule para qué valor de corrimiento al rojo $z_{\rm rei}$ ocurrió la reionización si ésta fue total y repentina. Suponer que el Universo es espacialmente plano, con $\Omega_{\rm b} h^2 = 0.022$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ y $H_0 = 67$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

8. Considerando que el satélite COBE alcanzó una cobertura total del cielo con una resolución angular de 7°, estime el rango de valores del momento multipolar l para el cual es posible una adecuada caracterización de las anisotropías del fondo cósmico de radiación. Repita el mismo cálculo para los satélites WMAP y Planck cuyas resoluciones angulares son 0.23° y 5′ respectivamente.

   En función del los resultados anteriores, enumere cuáles son los procesos/efectos físicos, entre los que se describen en esta guía, que pueden observarse adecuadamente a través de cada uno de los experimentos mencionados.

Polarización de la RCF

9. **Parámetros de Stokes.** Para describir cuantitativamente la polarización de la radiación se utilizan los parámetros de Stokes T, Q, U y V. T está vinculado con la intensidad total, Q con la polarización lineal en los ejes horizontal ($\hat{x}$) y vertical ($\hat{y}$), U con la polarización lineal en los ejes a 45° de los anteriores y V con la polarización circular.

   Una forma de estimar el parámetro de Stokes U es restar las amplitudes cuadradas del campo eléctrico en las direcciones a +45° y −45° respectivamente. Considerando que la sección eficaz de Thomson para haces polarizados es proporcional a $|\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}'|$, con $\hat{\epsilon}'$ el versor de polarización incidente y $\hat{\epsilon}$ el saliente, la amplitud cuadrada del campo en la dirección $\hat{\epsilon}_i$ es proporcional a

$$\sum_{j=1}^{2} \left| \hat{\epsilon}_i(\hat{n}) \cdot \hat{\epsilon}_j(\hat{n}') \right|^2 , \tag{10}$$

   con $\hat{n}$ y $\hat{n}'$ las direcciones de propagación del haz saliente reemitido por el electrón y del haz incidente respectivamente.

   De modo que el parámetro U generado por un haz que incide con dirección $\hat{n}'$ es proporcional a la resta entre la cantidad (10) evaluada en la dirección +45° y en la dirección −45°.

   (a) Calcule (módulo factores constantes) el parámetro U correspondiente a un haz incidente con dirección de propagación $\hat{n}'$.

   (b) Sabemos que la incidencia se produce desde todas las direcciones con una función de distribución $f(\hat{n}')$. Encuentre entonces una expresión para el parámetro U en función de $f(\hat{n}')$.

   (c) Si tuviera que expandir la función de distribución $f(\hat{n}')$ en multipolos, ¿qué término sería el más relevante? ¿Por qué?

   (d) ¿Podría relacionar $f(\hat{n}')$ con alguna cantidad que ya ha estudiado en esta guía? Responda cualitativamente.

(e) Según la respuesta anterior, ¿qué espera sobre la amplitud del espectro de polarización respecto al espectro de temperatura?

Ayuda. Establezca un sistema de coordenadas fijo al electrón. Considere que la dirección de propagación saliente es $\hat{n} = \hat{z}$ y escriba la dirección de incidencia en coordenadas primadas convenientes.

Parámetros cosmológicos y CAMB

El código CAMB permite obtener el espectro angular de las anisotropías de la RCF (tanto en la temperatura como en la polarización) a partir de las ecuaciones de Boltzmann acopladas. De esta forma, podemos estudiar su dependencia con los parámetros cosmológicos. Considere como base el modelo cosmológico estándar espacialmente plano con los siguientes parámetros:

- $\Omega_\Lambda = 0.684$
- $\Omega_\mathrm{m} = 0.316$
- $\Omega_\mathrm{b} = 0.049$
- $T_0 = 2.73$ K
- $h = 0.673$; recuerde que $H_0 = 100\,h$ km s^{-1} Mpc^{-1}
- $\tau_{rei} = 0$
- $A_s = 2 \times 10^{-9}$
- $n_s = 0.96$
- $r = 0$

10. **Fluctuaciones en la temperatura**

(a) Grafique el espectro angular de potencias de las fluctuaciones en temperatura, en el plano $l(l+1)C_l/2\pi$ versus l. ¿Por qué es conveniente utilizar esta expresión en la coordenada y? ¿Qué representa el valor de l?

(b) Ahora estudiamos la dependencia del espectro angular de fluctuaciones en función de los parámetros cosmológicos. Varíe los siguientes parámetros, de a uno por vez, respecto de los establecidos anteriormente. En cada caso, muestre los resultados en un gráfico e interprete. En particular explique por qué se detectan (o no) variaciones en la ubicación y/o amplitud de los picos, y por qué cambia (o no) la dependencia de la curva para escalas grandes. Los parámetros cosmológicos no son independientes, por lo tanto al variar uno se debe tomar algún criterio claro de cómo cambian el resto de los parámetros.

i. Curvatura: varíe Ω_K entre -0.07 y 0.07, dejando fijo $\Omega_\mathrm{m} = \Omega_\mathrm{c} + \Omega_\mathrm{b}$.

ii. Reionización: varíe τ_rei entre 0.01 y 0.1, para un universo plano. ¿Es posible encontrar una combinación de A_s y n_s para $\tau_\mathrm{rei} = 0$ que recupere (al menos cualitativamente) los mismos resultados de $\tau_\mathrm{rei} \neq 0$? En caso afirmativo, de un ejemplo de tal combinación.

iii. Densidad de materia oscura: varíe $\Omega_\mathrm{c} h^2$ entre 0 y 0.5, para un universo plano y dejando fijo $\Omega_\mathrm{b} h^2$.

iv. Densidad de bariones: varíe $\Omega_\mathrm{b} h^2$ entre 0.01 y 0.06, manteniendo fija la cantidad de materia total para un universo plano.

11. **Flutuaciones en la polarización: Modos E.** Utilizando las salidas del código CAMB, con los parámetros cosmológicos estándar establecidos al comienzo de esta sección, estudie la polarización de la radiación cósmica de fondo en función de los siguientes enunciados.

    (a) Grafique el espectro angular de las fluctuaciones para los modos "E" de la polarización. Notará que la amplitud máxima de la polarización es muy pequeña comparada con la amplitud de las anisotropías en la temperatura. Observando el gráfico estime qué porcentaje de la radiación cósmica de fondo se halla polarizada en este modelo.

    (b) Grafique ahora las correlaciones cruzadas entre la temperatura "T" y la polarización "E": TT, EE y TE. Note que, en este caso, podrá obtener valores positivos y negativos. Teniendo en cuenta las amplitudes de la señal en cada caso, discuta si la curva TE puede utilizarse para estudiar la polarización en escalas angulares para las cuales es difícil alcanzar la sensibilidad necesaria para detectar la señal asociada a la curva EE.

    (c) Los espectros TT y EE poseen similitudes y diferencias en términos de la presencia de oscilaciones, su amplitud en relación a la escala angular, las frecuencias de oscilación típicas, la posición de los máximos y mínimos, la escala para la cual la señal se amortigua, etc. Explique brevemente algunas de estas características.

12. **Fluctuaciones en la polarización: Modos B.** La gran novedad de los modos B es que, en principio, la correlación C_l^{BB} es nula si consideramos sólo perturbaciones escalares. De modo que si observaramos un valor no nulo para dicha correlación estaríamos en condiciones de afirmar la existencia de pertubaciones tensoriales primordiales, i.e., ondas gravitatorias primordiales. No obstante hay que tener cuidado con la afirmación anterior debido a que existen fenómenos como el efecto de lente gravitacional o efectos no lineales que pueden transformar modos E (e.g. producidos por perturbaciones escalares) en modos B. Por otra parte, como ya hemos discutido, las observaciones de las anisotropías propias de la RCF, y en particular las de la polarización, requieren de un complejo proceso denominado separación de componentes que permite *separar* la luz emitida por las fuentes cosmológicas que pretendemos observar de la luz proveniente de fuentes astrofísicas que consideramos como contaminantes.

    El South Pole Telescope y el experimento POLARBEAR midieron valores no nulos de la correlación BB en el año 2013 y 2014 respectivamente. Sin embargo no concluyeron la existencia de ondas gravitatorias primordiales. ¿Por qué?

    A su vez en el año 2014 el experimento BICEP2 también publicó valores no nulos de la correlación BB, pero esta vez favorables a la existencia de ondas gravitatorias primordiales. Luego de un gran desconcierto internacional la comunidad científica entendió que estos resultados no afirmaban la existencia de dichas ondas. ¿Por qué?

    Existen al menos 3 grandes efectos que podrían generar o modificar el espectro de los modos B de polarización de la RCF: el efecto de lente débil (*weak lensing*) y las ondas gravitatorias primordiales tanto durante recombinación como durante reionización. Utilizando los resultados del programa CAMB para el espectro C_l^{BB} responda

    (a) ¿Cuáles son las escalas características correspondientes a los efectos mencionados?. Justifique cualitativamente.

    (b) ¿Es necesaria la presencia de perturbaciones tensoriales iniciales ($r \neq 0$) para obtener una correlación BB no nula? Distinga entre los tres efectos y justifique.

    (c) Muestre los gráficos relevantes que utilizó para resolver. En particular un gráfico de los distintos espectros para un barrido en r (con y sin lente débil). Utilice escala logarítmica.

Ayuda. Usar los parámetros cosmológicos estándares establecidos al comienzo de esta sección. En este ejercicio son muy importantes las condiciones iniciales a partir de las cuales evolucionan las perturbaciones. Para las escalares podemos utilizar los siguientes valores $A_S = 2.1 \times 10^{-9}$ y $n_S = 0.96$. Para las tensoriales use un espectro invariante de escala, $n_T = 0$, cuya amplitud estará determinada por el parámetro r, *tensor-to-scalar ratio*, que es la razón entre las amplitudes de las fluctuaciones tensoriales y las escalares. Investigue las últimas cotas para r y corra el programa para distintos valores de r por encima y por debajo de esas cotas. A su vez fije la profundidad óptica de reionización, τ, en el valor medido por Planck 2018 y active/desactive la opción de reionización. Además tenga en cuenta activar/descativar la opción de lente débil.