

COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2021
Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese y Matias Leizerovich
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 3: Contenido del universo e historia térmica

Radiación, grados de libertad relativistas y termodinámica

1. Considere una expansión adiabática para nuestro universo en épocas recientes.
 - (a) Estime la densidad de entropía y un valor adimensional para la entropía por barión.
 - (b) Calcule ahora la entropía total de nuestro universo observable ¿Es grande o chica? ¿Contra qué la compararía?
2. En la época presente la radiación juega un rol comparativamente poco importante en el comportamiento mecánico y térmico de cuerpos materiales. Para verlo, basta tomar un volumen unidad de aire a temperatura y densidad normales. Como sabemos ya, este volumen incluye, además del aire, el “gas” formado por los cuantos de la radiación térmica. Verifique el rol menor de esta última, sabiendo que la densidad de masa y la capacidad calorífica por unidad de volumen de esta mezcla están dadas por

$$\rho = mn + aT^4/c^2 \quad C = \frac{3}{2}k_Bn + 4aT^3 \quad (1)$$

donde m y n son las masas promedio de las partículas de aire y su número por unidad de volumen, respectivamente, y donde k_B y a son las constantes de Boltzmann y de densidad de radiación.

- (a) ¿Qué pasa si ahora se traslada al centro de una estrella y considera la mezcla de materia y radiación con $\rho = 100 \text{ g/cm}^3$ y $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$?, ¿cambian en algo sus conclusiones sobre ρ y C ?. ¿Y si T fuera aún mayor? [comentario: claro que ahora $C = (3/2)k_Bn$ para la materia no tiene por qué ser cierto. Suponga que sí lo es y tome $n \sim 5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3} \sim \rho/m_{\text{proton}}$].
 - (b) Trasladémonos ahora al espacio interestelar donde encontramos nubes de gas con densidades $\rho \sim 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ y temperaturas de $T \sim 100 \text{ K}$. ¿Qué valores resultan ahora para ρ y C ?, ¿cuál de los dos componentes será más relevante en lo que espera en lo que respecta a consideraciones termodinámicas? En particular, si un dado volumen de la mezcla se expande o se contrae adiabáticamente, ¿cuál de los dos componentes determinará la variación de su temperatura?
 - (c) Finalmente, el balance entre materia y radiación en el universo es en muchos aspectos similar al caso del gas interestelar. Si, por simplicidad, tomamos $\rho \sim 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ para la materia y una temperatura de $T \sim 1 \text{ K}$, como es la capacidad calorífica por unidad de volumen de radiación comparada con la de la materia?, ¿a qué temperatura serían del mismo orden?
3. Pruebe y discuta por qué, la temperatura de un gas relativista en equilibrio térmico evoluciona con el factor de escala de acuerdo a la ley $T \propto 1/a$. Por otro lado pruebe y discuta por qué la temperatura de un gas no relativista en equilibrio térmico, pero que no interactúa con las especies relativistas, evoluciona con el factor de escala de acuerdo con la ley $T \propto 1/a^2$.

4. La densidad de energía de la radiación (partículas bosónicas o fermiónicas ultra-relativistas – i.e. con masas $m c^2 \ll k_B T$ –) puede escribirse en términos del número total efectivo de grados de libertad relativistas g_* . Como veremos, esta cantidad g_* depende de la temperatura.

- (a) Considere un sistema de fotones, electrones y neutrinos (y sus antipartículas) que permanece en equilibrio termodinámico. Muestre que $g_* = 10.75$. ¿En qué rango de temperaturas del universo tiene validez este valor?
- (b) Ahora considere temperaturas menores, por debajo de aquella en la que electrones y positrones se aniquilan ¿Qué valor obtiene para g_* ?

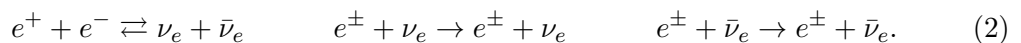
Ayuda. Para dar un valor explícito, puede ser de utilidad considerar la solución del ejercicio 6c.

- (c) ¿Es este último el valor actual de g_* ? ¿Qué suposición está haciendo sobre la masa de los neutrinos?
 - (d) Ahora considere temperaturas por encima de los 300 GeV e incluya todas las partículas presentes en el modelo estándar de partículas elementales ¿Qué valor obtiene para g_* ?
 - (e) ¿Es este último valor el máximo posible para g_* ? ¿O piensa usted que para energías muy altas (de gran unificación, por ejemplo) g_* podría ser aún mayor? Si fuera así ¿Cómo surgen esos nuevos grados de libertad?
 - (f) ¿Por qué no se incluye la contribución de las partículas no-relativistas en la definición de g_* ? (¿Qué hay en sus distribuciones de equilibrio -para la densidad de energía, por ejemplo- que suprimen sus contribuciones?)
5. Sea un modelo de Friedmann dominado por radiación, compuesto por fotones, neutrinos, electrones y muones, a una temperatura T_1 . En un instante posterior, cuando la temperatura es T_2 , los pares de muones ya se han aniquilado, mientras que las demás partículas siguen existiendo en equilibrio térmico y siguen siendo relativistas. Calcular T_2 en función de T_1 , $a(t_1)$ y $a(t_2)$.

6. Era leptónica, desacople de neutrinos y recalentamiento de fotones.

La era leptónica se conoce como aquella época dominada por las especies de partículas leptónicas en la que la temperatura del universo se encuentra entre $1 \text{ MeV} < k_B T < 100 \text{ MeV}$.

- (a) Para la época en cuestión encuentre la relación entre el tiempo coordinado físico t en segundos y la temperatura del universo en MeV. ¿Cuál es la edad del universo cuando su temperatura es $k_B T = 1 \text{ MeV}$?
- (b) Las principales reacciones responsables del equilibrio térmico entre los neutrinos electrónicos y el resto del gas durante la era leptónica son



Sabiendo que la sección eficaz de estos procesos es

$$\sigma = O(1)G_F^2(p_1 + p_2)^2, \quad (3)$$

donde p_1 y p_2 son los 4-momentos de las partículas incidentes y $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ es la constante de Fermi, estime la temperatura a la que se desacoplan los neutrinos electrónicos. ¿Qué pasa con las otras dos especies de neutrinos?

- (c) A partir del resultado del inciso 6b y usando la hipótesis de que el universo se expande adiabáticamente (conservación de la entropía), muestre que los neutrinos y los fotones tienen distintas temperaturas hoy. ¿Cuál es el motivo de esta diferencia?
- (d) Muestre que la densidad numérica de una especie de neutrinos y anti-neutrinos en el universo actual es

$$n_{\nu_i} = \frac{3}{11} n_\gamma = 112 \text{ cm}^{-3}.$$

Ayuda. Tenga en cuenta todos los tipos de partículas con abundancias apreciables presentes en el universo para la época a tratar. Preste particular atención a la conservación de la entropía y a los procesos de aniquilación. Para el inciso 6d considere primero la densidad numérica de los fotones y luego relaciónela con la densidad numérica de los neutrinos.

7. Asumiendo los valores reportados por las observaciones más recientes para las densidades de energía y materia en el universo, calcule el cociente a/a_0 , el redshift z , la temperatura T y el tiempo t correspondientes a los momentos de igualdad entre materia y radiación y entre materia y energía oscura.

Energía oscura y expansión acelerada

8. A fines de la década de 1990, dos grupos de investigación (Riess et. al. 1998 y Perlmutter et. al. 1999) reportaron las distancias luminosas d_L en función de los redshifts z de cientos de galaxias a partir de las observaciones de las Supernovas Tipo Ia (SNIa). Estas mediciones son muy difíciles de realizar ya que no es trivial reducir las fuentes de errores. Algunas de las fuentes de error importantes son los movimientos peculiares de cada galaxia y los errores sistemáticos en la descripción de las SNIa¹. Explique en pocas líneas por qué es necesario utilizar las SNIa para medir la distancia luminosa.

Ayuda. Piense cuál es la definición física de la distancia luminosa y qué puede medirse en astronomía.

- (a) Tome la expresión de la distancia luminosa $d_L(z)$ para un universo plano calculada en la guía anterior. Expanda esta expresión para $z \ll 1$ a segundo orden y escriba los coeficientes de esta expansión en función de $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ y $q_0 = -a_0\ddot{a}_0/\dot{a}_0^2$. Estos parámetros tienen una interpretación cinemática de la evolución de $a(z)$, ¿cuál es para cada uno?
- (b) Utilice la expansión a segundo orden realizada en el punto 8a (modelo cuadrático) y genere un fiteo de los parámetros H_0 y q_0 sobre los datos SnIa.txt con $0 < z < 0.5$, ¿qué resultados obtuvo? ¿puede concluir algo? ¿podría haber utilizado la expansión sólo a primer orden?
- (c) Ahora tome la expresión general para un universo plano y grafique sobre los datos la curva $d_L(z)$ reemplazando $H_0 = 67.3 \text{ km/s/Mpc}$ y los parámetros de densidad por
- i. $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{\gamma,0} = 0$ y $\Omega_{m,0} = 1$ (Recuerde que $\Omega_{K,0} = 0$ por universo plano. Podría calcularse todo nuevamente para un universo con curvatura arbitraria).

¹Actualmente estas mediciones han sido refinadas y los errores reportados permiten extraer información precisa de ciertos parámetros cosmológicos que hoy generan una de las tensiones más grandes en cosmología. Este problema lo charlaremos más adelante.

- ii. los valores de las observaciones más recientes. Discuta cualitativamente la precisión de ambos modelos. ¿Qué concluye?

Algo más sofisticado habría sido generar un fiteo de todos los parámetros de la expresión general sobre los datos y extraer de allí los resultados, si se anima...