COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2021

Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese y Matias Leizerovich
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 7: Ecuaciones y perturbaciones cosmológicas

Ecuaciones de Boltzmann, perturbaciones y aproximación de fluido

1. Definiendo
$$S_{\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}'}} = 1 + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}'})^2 - 1}{4}, \tag{1}$$
demostrar que
$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi'\, S_{\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}'}}\Theta(\mu', k, \eta) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} d\mu' [2 + \mathcal{P}_2(\mu)\mathcal{P}_2(\mu')]\Theta(\mu', k, \eta), \tag{2}$$
donde $\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$ es el polinomio de Legendre de orden 2.

2. Considere una métrica de FLRW perturbada de la forma
$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)\, dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}(1 + 2\Phi)dx^i dx^j] \tag{3}$$
   (a) Hallar las componentes $\delta T^0{}_i$ y la traza $\delta T^i{}_i$ del tensor de energía-impulso para cada especie (fotones, neutrinos, bariones y CDM) en términos de los momentos de la función de distribución perturbada correspondiente.

   (b) Muestre que las perturbaciones lineales del tensor de energía-impulso de un fluido no perfecto
$$T^\mu{}_\nu = u^\mu u_\nu (P + \rho) + P\delta^\mu_\nu + \Sigma^\mu_\nu \tag{4}$$
   con $u^\mu u_\mu = -1$, $u_\mu \Sigma^\mu_\nu = u^\nu \Sigma^\mu_\nu = 0$, $\bar{\Sigma}^\mu_\nu = 0$, pueden escribirse como
$$\begin{aligned} \delta T^0{}_0 &= -\delta\rho & (5)\\ \delta T^0{}_i &= (\bar{P} + \bar{\rho})\,\delta u_i & (6)\\ \delta T^i{}_j &= -\delta P \delta^i_j + \Sigma^i_j & (7)\\ \delta T^i{}_0 &= -(\bar{P} + \bar{\rho})\frac{\delta u_i}{a^2} & (8)\\ &\text{con } \ u_\mu = (-1 - \Psi,\, \delta u_i). & (9) \end{aligned}$$

   (c) Comparando las componentes $\delta T^0{}_i$ obtenidas en 2a-2b y definiendo $\delta u_i = \delta u_{,i}$, identificar las variables δu del fluido correspondientes a cada especie, i.e. δu_γ, δu_b, $\delta u_{\rm cdm}$,δu_ν, en términos de la función de distribución.

Transformaciones de gauge y teorema de descomposición

3. Muestre que ante una transformación de gauge, $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ con $\xi^i = {\xi_S}^{,i} + {\xi_V}^i$, las distintas componentes de la métrica

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 - 2A && (10)\\
g_{0i} &= a\left[-B_{,i} - B_i\right] && (11)\\
&\quad \text{con} \quad ({B_i}^{,i} = 0) &&\\
g_{ij} &= a^2\left[\delta_{ij}(1+2D) - 2E_{,ij} + V_{i,j} + V_{j,i} + h^{TT}_{ij}\right] && (12)\\
&\quad \text{con} \quad ({V_i}^{,i} = 0,\ h^{TT,i}_{ij} = h^{TT,j}_{ij} = {h^{TT}}_i^{\ i} = 0),
\end{aligned}
$$

transforman como:

$$\Delta A = -a^{-1}\xi^{0\prime} \tag{13}$$
$$\Delta B = -a^{-1}\xi^0 + {\xi_S}' \tag{14}$$
$$\Delta D = -H\xi^0 \tag{15}$$
$$\Delta B_i = {\xi_V}'_i \tag{16}$$
$$\Delta V_i = -{\xi_V}_i \tag{17}$$
$$\Delta h^{TT}_{ij} = 0. \tag{18}$$

Recuerde que según la notación y las convenciones que utilizamos los índices espaciales se suben y bajan con la delta de Kronocker δ_{ij}, tal que ${\xi_V}_i = {\xi_V}^i$ y ${\xi_S}^{,i} = \xi_{S,i} = \partial\xi_S/\partial x^i$.

4. (a) Use el resultado del problema anterior para mostrar que los potenciales de Bardeen:

$$\Phi_A \equiv A + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta}[a(E' - B)] \tag{19}$$
$$\Phi_H \equiv -D + aH(B - E') \tag{20}$$

son invariantes de gauge.

(b) Use que

$$
\begin{aligned}
\Delta(\delta\rho) &= -\dot{\bar{\rho}}\xi^0 && (21)\\
\Delta(\delta P) &= -\dot{\bar{P}}\xi^0 && (22)\\
\Delta(\delta u) &= \xi^0 && (23)
\end{aligned}
$$

y muestre que las variables

$$
\begin{aligned}
\zeta &= D - H\delta\bar{\rho}/\dot{\rho} && (24)\\
R &= D + H\,\delta u && (25)
\end{aligned}
$$

son invariantes de gauge.