

COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2024
Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese,
Tomas Ferreira Chase y Pedro Cataldi
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 2: Universo de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

Ecuaciones, soluciones y edad del universo

1. La expansión del universo en los modelos cosmológicos simples está descrita por una única función dependiente del tiempo $a(t)$ llamada factor de escala (NO es el radio del universo, ¿por qué?). Considere que esta función está dada por $a(t) \propto t^p$ con $p > 0$ constante.
 - (a) ¿Para qué valor de p la edad del universo t_0 coincide con H^{-1} (no sólo para la época presente)? ¿Qué tipo de expansión resulta? ¿Cómo conseguiría este tipo de evolución partiendo de las ecuaciones de Friedmann?
 - (b) Aunque parezca anti-intuitivo, un universo con $a(t) \propto t^{2/3}$ NO se expande más rápido que uno con $a(t) \propto t^{1/2}$. Explique por qué.
2. (a) A partir de la **ecuación de Friedmann**

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1)$$

con $H = \dot{a}/a$, y la **conservación local de la energía**

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} + p \frac{da^3}{dt} = 0, \quad (2)$$

obtenga la **ecuación de aceleración**

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}a(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}a. \quad (3)$$

- (b) Aquí tenemos tres ecuaciones que no son independientes, de hecho cualquier par de las tres puede ser adoptado como las ecuaciones dinámicas fundamentales en cosmología. Identifique cuáles son las variables dinámicas. ¿Puede cerrar el sistema de ecuaciones?, ¿qué falta?
3. Obtener la solución más general de la ecuación de Friedmann para el factor de escala en función del tiempo puede ser complicado debido a la dependencia con las distintas componentes de energía y materia presentes en el Universo. Sin embargo es instructivo estudiar la evolución de a para ciertos casos simples.
 - (a) Dada una ecuación de estado del tipo $p = w\rho$, encuentre la relación entre la densidad de energía y el factor de escala.
 - (b) Distintos valores de w representan de manera efectiva algún tipo de materia o energía. Asumiendo un universo plano $K = 0$ y sin constante cosmológica $\Lambda = 0$, encuentre la expresión de $a(t)$ para cada uno de los siguientes casos
 - i. Materia no relativista (polvo), $w = 0$.

- ii. Energía de radiación, $w = 1/3$.
 - iii. Energía oscura o energía de vacío, $w = -1$.
 - iv. Vuelva a resolver el universo con materia no relativista pero ahora para los casos con curvatura espacial abierta ($K = -1$) y cerrada ($K = 1$) y compare con 3(b)i. Para el universo espacialmente cerrado encuentre el máximo valor que alcanzará a .
- (c) Es posible intentar resolver $a(t)$ para un universo plano con los tres tipos de materia y energía mencionados arriba. Usando 3a y tomando como dato las densidades hoy, calcule la densidad de energía total del universo. ¿Qué aproximación realizaría para tener una idea del comportamiento de $\rho_{total}(a)$? ¿Cuáles son los valores de a para los cuales se poduce el equilibrio entre materia y radiación, y materia y energía oscura?. Asumiendo $a_0 = 1$ transforme los resultados de a a z .
4. (a) Muestre que la ecuación de Friedmann puede expresarse como

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{\gamma,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}], \quad (4)$$

donde H_0 es la constante de Hubble hoy y $\Omega_{\gamma,0}$, $\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{\Lambda,0}$ corresponden a los valores actuales de la densidad de radiación, densidad de materia y densidad de energía oscura¹ normalizadas con la densidad crítica actual $\rho_{c,0} = 3H_0^2 c^2 / (8\pi G)$, respectivamente. Por último $\Omega_{K,0} = -K / (a_0 H_0)^2$ representa la densidad de curvatura hoy.

- (b) ¿Existe alguna relación entre los parámetros de densidad Ω_i ? Investigue los valores más recientes para los parámetros cosmológicos H_0 , $\Omega_{\gamma,0}$, $\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{\Lambda,0}$; ¿puede decir algo sobre la geometría espacial de nuestro universo?
 - (c) A partir del resultado obtenido en 4a, calcular la expresión analítica más general para la edad del universo, t_0 .
 - i. Evalúe dicha expresión para un universo plano sólo con materia en forma de polvo (modelo de Einstein–de Sitter), otro sólo con radiación y finalmente con constante cosmológica (70%) y materia en forma de polvo (30%).
 - ii. ¿Cómo se comparan las edades de los tres universos encontradas en 4(c)i?
 - iii. Resuelva numéricamente la edad del universo para el caso general con los datos hallados en 10b y discuta las aproximaciones que se hicieron anteriormente.
5. Asuma un universo con una constante de curvatura K cuya densidad de energía total ρ está determinada por i tipos de materia y energía caracterizados por una ecuación de estado $p_i = w_i \rho_i$. No incluya la constante cosmológica explícitamente (asuma $\Lambda = 0$) ya que a efectos prácticos puede ser incorporada a través un tipo de materia que cumpla la relación $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} = \text{cte}$. Utilizando los resultados de 3a acerca de la función $\rho(a)$:

- (a) muestre que la ecuación de Friedmann (1) puede expresarse de la siguiente forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + V_{\text{eff}}(a) = \text{cte}, \quad (5)$$

es decir como un problema de conservación de energía unidimensional cuya variable dinámica es a . Halle las expresiones para el potencial efectivo y la constante.

¹Note aquí que tanto la energía de vacío como la constante cosmológica o la energía oscura tienen efectivamente la misma relación $p = -\rho = \text{cte}$. Sin embargo cada concepto es diferente, su inclusión está motivada por distintos aspectos teóricos y observacionales y tienen distintas implicancias en otros procesos físicos.

- (b) muestre que no existe ninguna solución estática si todos los componentes del universo son convencionales, es decir corresponden a fluidos físicamente razonables con presiones ($w_i \geq 0$) y densidades de energía no negativas.
- (c) abandone la idea de fluidos físicamente razonables y asuma un universo con materia ordinaria no relativista y energía oscura (o constante cosmológica). Grafique el potencial efectivo y analice los casos $\rho_\Lambda > 0$ ($\Lambda > 0$), $\rho_\Lambda = 0$ ($\Lambda = 0$) y $\rho_\Lambda < 0$ ($\Lambda < 0$). ¿Encuentra soluciones estacionarias?, ¿son estables?
- (d) Para el caso del inciso anterior, encuentre las condiciones que deben cumplir $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ y H_0 para que el universo pueda contraerse hasta un tamaño mínimo finito y luego expandirse indefinidamente. En este caso, ¿es posible considerar la condición inicial singular $a(t_i) = 0$? Justifique su respuesta.

Distancias en cosmología y horizontes

6. Ya hemos discutido que la evolución cosmológica del espacio-tiempo es no trivial. Una consecuencia directa es que existen diferentes definiciones de distancia por ejemplo la distancia física y la comóvil. En términos prácticos ninguna de las dos da una herramienta útil para realizar las observaciones de las cuáles extraemos la información de nuestro universo. En los próximos ejercicios veremos otros conceptos de distancias vinculados a procesos específicos que nos permiten realizar observaciones.

Sabemos que el elemento de línea más general para un universo isótropo y homogéneo con curvatura espacial arbitraria es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (6)$$

- (a) Utilice el siguiente cambio de coordenadas $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (\eta, \mathbf{x})$ con η el tiempo conforme (o comóvil) tal que $d\eta = dt/a(t)$ y reescriba el elemento de línea. ¿Qué propiedad tiene la métrica en estas nuevas coordenadas?
 - (b) Encuentre la relación entre la distancia comóvil χ que recorre un fotón, en una trayectoria radial emitido en $(t_e, 0)$ y recibido en (t, r) , y el tiempo físico t para cada tipo de curvatura espacial. Idem con el tiempo conforme (o comóvil) η . ¿Cómo se relaciona esta distancia con la distancia física?
7. En principio, no es posible determinar el tamaño del universo. No obstante, dado que la luz se propaga a velocidad finita a cada observador le corresponde una región acotada del espacio más allá de la cual la luz no logra alcanzarlo. De este modo es posible definir el concepto de universo observable u horizonte de partículas como la distancia física que recorre un fotón emitido en t_{BB} (tiempo del Big Bang) hasta t , i.e. $d_H(t) = a(t) \chi(t, t_{BB})$ donde $\chi(t, t_{BB})$ es la distancia comóvil. En efecto esta cantidad define el tamaño físico del universo al cual tiene acceso un observador en un tiempo t .
- (a) Utilice el resultado en 6b y escriba $d_H(t)$ como función de t y el factor de escala $a(t)$.
 - (b) Muestre que si se cumple la condición fuerte de energía $\rho + 3p > 0$, con ρ y p la densidad de energía y la presión del contenido dominante del universo, el horizonte de partículas $d_H(t)$ y la escala de Hubble $H^{-1}(t)$ son del mismo orden. ¿Qué tipos de materia o energía, de las ya mencionadas, cumplen con esta condición?

- (c) Ahora considere un universo plano con energía oscura (o con constante cosmológica positiva), ¿qué sucede con la condición de energía fuerte?. Calcule el cociente entre d_H y H^{-1} para este escenario, ¿es de orden 1?
- (d) Use los datos observacionales correspondientes al contenido del universo y estime el tamaño del universo observable hoy.

Ayuda. Puede ser útil volver a mirar el desarrollo del ejercicio 4c.

8. **Test de Alcock–Paczynski.** La idea en este ejercicio es extraer información sobre la evolución cosmológica a partir de observaciones de distancias.

- (a) Suponga que tiene dos galaxias sobre la línea de visión separadas por una distancia física L_{AB} . La galaxia más cercana corresponde a un *redshift* z_A y la más lejana a z_B . Asuma que $\Delta z = z_B - z_A \ll z$, con z el *redshift* intermedio y muestre que

$$\frac{\Delta z}{1+z} = \frac{H(z) L_{AB}}{c}. \quad (7)$$

Si conociéramos L_{AB} (o χ_{AB}), midiendo el *redshift* podríamos estimar $H(z)$. El problema es que ni la distancia física L_{AB} ni la comóvil $\chi_{AB} = L_{AB}(1+z)$ son conocidas a priori en la mayoría de los escenarios.

- (b) Asuma ahora que esas galaxias forman parte de un grupo de galaxias cuya distribución es esféricamente simétrica. Si $\Delta\theta$ es la apertura angular que ocupa el grupo de galaxias en el cielo entonces se define la distancia angular diametral como $d_A = L_{AB}/\Delta\theta$. A partir de estas definiciones encuentre una expresión que permita extraer información cosmológica (i.e. de $H(z)$) sólo en función de los observables, que en este caso son z , Δz y $\Delta\theta$.

Este procedimiento se denomina el test de Alcock–Paczynski. Permite obtener información de la evolución del universo a partir de los observables Δz , z y $\Delta\theta$ correspondientes a una estructura de galaxias esféricamente simétrica. No obstante para extraer información precisa es necesario tener muchas observaciones de este tipo de estructuras y además poder separar el efecto cosmológico (que queremos observar) de los efectos de las velocidades peculiares de las galaxias que distorsionan la observación.

9. **Distancia luminosa.** Probablemente el mejor método para medir distancias en cosmología es la distancia luminosa. La idea es simple cuanto más lejano se encuentra un objeto que emite luz más tenue lo observamos. En efecto, esta distancia se define a partir del flujo de energía observado F y la luminosidad intrínseca L de la fuente tal que $F = L/4\pi d_L^2$. En ciertos escenarios, como la explosión de cierto tipo de supernovas, estas dos cantidades F y L pueden medirse. Calcule la distancia luminosa $d_L(z)$ para los universos cerrado, plano e hiperbólico. Muestre que para objetos cercanos las distancias luminosas para los tres universos coinciden, pero que para objetos lejanos, la distancia luminosa medida en un universo cerrado es menor que la observada en un universo plano o hiperbólico.
10. **Energía oscura y expansión acelerada.** A fines de la década de 1990, dos grupos de investigación (Riess et. al. 1998 y Perlmutter et. al. 1999) reportaron las distancias luminosas d_L en función de los redshifts z de cientos de galaxias a partir de las observaciones de las Supernovas Tipo Ia (SNIa). Estas mediciones son muy difíciles de realizar ya que no es trivial reducir las fuentes de errores. Algunas de las fuentes de error importantes son los movimientos

peculiares de cada galaxia, la calibración de los métodos para medir distancia en diferentes escalas y los errores sistemáticos en la descripción de la explosión y los parámetros de las SNIa². Explique en pocas líneas por qué es necesario utilizar las SNIa para medir la distancia luminosa.

Ayuda. Piense cuál es la definición física de la distancia luminosa y qué puede medirse en astronomía.

- (a) Tome la expresión de la distancia luminosa $d_L(z)$ para un universo plano calculada en la guía anterior. Expanda esta expresión para $z \ll 1$ a segundo orden y escriba los coeficientes de esta expansión en función de $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ y $q_0 = -a_0\ddot{a}_0/\dot{a}_0^2$. Estos parámetros tienen una interpretación cinemática de la evolución de $a(z)$, ¿cuál es para cada uno?
 - (b) Utilice la expansión a segundo orden realizada en el punto 10a (modelo cuadrático) y genere un fiteo de los parámetros H_0 y q_0 sobre los datos SnIa.txt con $0 < z < 0.5$, ¿qué resultados obtuvo? ¿puede concluir algo? ¿podría haber utilizado la expansión sólo a primer orden?
 - (c) Ahora tome la expresión general para un universo plano y grafique sobre los datos la curva $d_L(z)$ reemplazando $H_0 = 67.3$ km/s/Mpc y los parámetros de densidad por
 - i. $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{\gamma,0} = 0$ y $\Omega_{m,0} = 1$ (Recuerde que $\Omega_{K,0} = 0$ por universo plano. Podría calcularse todo nuevamente para un universo con curvatura arbitraria).
 - ii. los valores de las observaciones más recientes. Discuta cualitativamente la precisión de ambos modelos. ¿Qué concluye?

Algo más sofisticado habría sido generar un fiteo de todos los parámetros de la expresión general sobre los datos y extraer de allí los resultados, si se anima...
11. Muchas observaciones de distancias se realizan en función del *redshift* cosmológico z . Pero, ¿es cierto que z puede estimarse independientemente de la distancia luminosa, angular, comóvil o física?. En caso afirmativo describa cualitativamente el método de medición de z . En caso negativo argumente cuál es el inconveniente.

²Actualmente estas mediciones han sido refinadas y los errores reportados permiten extraer información precisa de ciertos parámetros cosmológicos que hoy generan una de las tensiones más grandes en cosmología. Este problema lo charlaremos más adelante.