

COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2024  
Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese,  
Tomas Ferreira Chase y Pedro Cataldi  
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 3: Contenido del universo e historia térmica

**Radiación, grados de libertad relativistas y termodinámica**

1. Considere una expansión adiabática para nuestro universo en épocas recientes.
  - (a) Estime la densidad de entropía y un valor adimensional para la entropía por barión.
  - (b) Calcule ahora la entropía total de nuestro universo observable ¿Es grande o chica? ¿Contra qué la compararía?
2. En la época presente la radiación juega un rol comparativamente poco importante en el comportamiento mecánico y térmico de cuerpos materiales. Para verlo, basta tomar un volumen unidad de aire a temperatura y densidad normales. Como sabemos ya, este volumen incluye, además del aire, el “gas” formado por los cuantos de la radiación térmica. Verifique el rol menor de esta última, sabiendo que la densidad de masa y la capacidad calorífica por unidad de volumen de esta mezcla están dadas por

$$\rho = mn + aT^4/c^2 \quad C = \frac{3}{2}k_B n + 4aT^3 \quad (1)$$

donde  $m$  y  $n$  son las masas promedio de las partículas de aire y su número por unidad de volumen, respectivamente, y donde  $k_B$  y  $a$  son las constantes de Boltzmann y de densidad de radiación.

- (a) ¿Qué pasa si ahora se traslada al centro de una estrella y considera la mezcla de materia y radiación con  $\rho = 100 \text{ g/cm}^3$  y  $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$ ?, ¿cambian en algo sus conclusiones sobre  $\rho$  y  $C$ ?. ¿Y si  $T$  fuera aún mayor? [comentario: claro que ahora  $C = (3/2)k_B n$  para la materia no tiene por qué ser cierto. Suponga que sí lo es y tome  $n \sim 5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3} \sim \rho/m_{\text{proton}}$ ].
  - (b) Trasladémonos ahora al espacio interestelar donde encontramos nubes de gas con densidades  $\rho \sim 10^{-24} \text{ g/cm}^3$  y temperaturas de  $T \sim 100 \text{ K}$ . ¿Qué valores resultan ahora para  $\rho$  y  $C$ ?, ¿cuál de los dos componentes será más relevante en lo que espera en lo que respecta a consideraciones termodinámicas? En particular, si un dado volumen de la mezcla se expande o se contrae adiabáticamente, ¿cuál de los dos componentes determinará la variación de su temperatura?
  - (c) Finalmente, el balance entre materia y radiación en el universo es en muchos aspectos similar al caso del gas interestelar. Si, por simplicidad, tomamos  $\rho \sim 10^{-30} \text{ g/cm}^3$  para la materia y una temperatura de  $T \sim 1 \text{ K}$ , como es la capacidad calorífica por unidad de volumen de radiación comparada con la de la materia?, ¿a qué temperatura serían del mismo orden?
3. Pruebe y discuta por qué, la temperatura de un gas relativista en equilibrio térmico evoluciona con el factor de escala de acuerdo a la ley  $T \propto 1/a$ . Por otro lado pruebe y discuta por qué la temperatura de un gas no relativista en equilibrio térmico, pero que no interactúa con las especies relativistas, evoluciona con el factor de escala de acuerdo con la ley  $T \propto 1/a^2$ .

4. La densidad de energía de la radiación (partículas bosónicas o fermiónicas ultra-relativistas – i.e. con masas  $m c^2 \ll k_B T$  –) puede escribirse en términos del número total efectivo de grados de libertad relativistas  $g_*$ . Como veremos, esta cantidad  $g_*$  depende de la temperatura.

- (a) Considere un sistema de fotones, electrones y neutrinos (y sus antipartículas) que permanece en equilibrio termodinámico. Muestre que  $g_* = 10.75$ . ¿En qué rango de temperaturas del universo tiene validez este valor?
- (b) Ahora considere temperaturas menores, por debajo de aquella en la que electrones y positrones se aniquilan ¿Qué valor obtiene para  $g_*$ ?

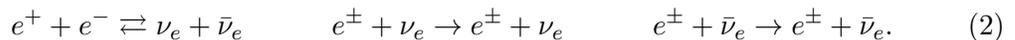
**Ayuda.** Para dar un valor explícito, puede ser de utilidad considerar la solución del ejercicio 6c.

- (c) ¿Es este último el valor actual de  $g_*$ ? ¿Qué suposición está haciendo sobre la masa de los neutrinos?
  - (d) Ahora considere temperaturas por encima de los 300 GeV e incluya todas las partículas presentes en el modelo estándar de partículas elementales ¿Qué valor obtiene para  $g_*$ ?
  - (e) ¿Es este último valor el máximo posible para  $g_*$ ? ¿O piensa usted que para energías muy altas (de gran unificación, por ejemplo)  $g_*$  podría ser aún mayor? Si fuera así ¿Cómo surgen esos nuevos grados de libertad?
  - (f) ¿Por qué no se incluye la contribución de las partículas no-relativistas en la definición de  $g_*$ ? (¿Qué hay en sus distribuciones de equilibrio -para la densidad de energía, por ejemplo- que suprimen sus contribuciones?)
5. Sea un modelo de Friedmann dominado por radiación, compuesto por fotones, neutrinos, electrones y muones, a una temperatura  $T_1$ . En un instante posterior, cuando la temperatura es  $T_2$ , los pares de muones ya se han aniquilado, mientras que las demás partículas siguen existiendo en equilibrio térmico y siguen siendo relativistas. Calcular  $T_2$  en función de  $T_1$ ,  $a(t_1)$  y  $a(t_2)$ .

#### 6. Era leptónica, desacople de neutrinos y recalentamiento de fotones.

La era leptónica se conoce como aquella época dominada por las especies de partículas leptónicas en la que la temperatura del universo se encuentra entre  $1 \text{ MeV} < k_B T < 100 \text{ MeV}$ .

- (a) Para la época en cuestión encuentre la relación entre el tiempo coordinado físico  $t$  en segundos y la temperatura del universo en MeV. ¿Cuál es la edad del universo cuando su temperatura es  $k_B T = 1 \text{ MeV}$ ?
- (b) Las principales reacciones responsables del equilibrio térmico entre los neutrinos electrónicos y el resto del gas durante la era leptónica son



Sabiendo que la sección eficaz de estos procesos es

$$\sigma = O(1)G_F^2(p_1 + p_2)^2, \quad (3)$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son los 4-momentos de las partículas incidentes y  $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  es la constante de Fermi, estime la temperatura a la que se desacoplan los neutrinos electrónicos. ¿Qué pasa con las otras dos especies de neutrinos?

- (c) A partir del resultado del inciso 6b y usando la hipótesis de que el universo se expande adiabáticamente (conservación de la entropía), muestre que los neutrinos y los fotones tienen distintas temperaturas hoy. ¿Cuál es el motivo de esta diferencia?
- (d) Muestre que la densidad numérica de una especie de neutrinos y anti-neutrinos en el universo actual es

$$n_{\nu_i} = \frac{3}{11}n_{\gamma} = 112 \text{ cm}^{-3}.$$

**Ayuda.** Tenga en cuenta todos los tipos de partículas con abundancias apreciables presentes en el universo para la época a tratar. Preste particular atención a la conservación de la entropía y a los procesos de aniquilación. Para el inciso 6d considere primero la densidad numérica de los fotones y luego relaciónela con la densidad numérica de los neutrinos.

7. Considerando los valores reportados por las observaciones más recientes para las densidades de energía y materia en el universo, calcule el cociente  $a/a_0$ , el redshift  $z$  y el tiempo  $t$  correspondientes a los momentos de igualdad entre materia y radiación y entre materia y energía oscura. Estime la temperatura  $T$  que corresponde a cada momento, compare con el tiempo encontrado en el inciso 6a.

*Para calcular  $t$ , escriba una expresión general a partir de la cual poder hallar el tiempo  $t(z)$  en función del redshift. Luego utilice las aproximaciones adecuadas que le permitan dar una expresión analítica para  $t^* = t(z^*)$  con  $z^*$  el redshift encontrado para cada uno de los dos casos mencionados arriba.*